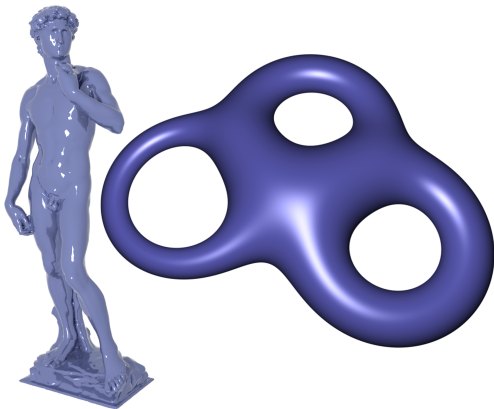


Géométrie différentielle

IMI, CPE Lyon

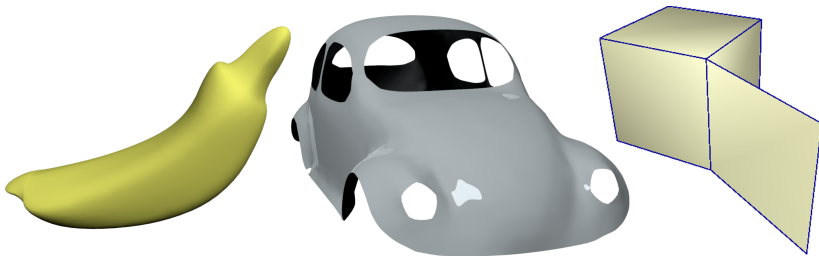
■ **Topologie** = Étude de la structure d'un espace indépendamment de sa géométrie.

- 2 surfaces sont topologiquement équivalentes si on peut transformer l'une en l'autre par des transformations continues (pas de déchirures ni soudures).



Notion de variété

- Une surface Γ est une **2-variété (manifold)** ssi tout point possède un voisinage **homéomorphe** à un (demi) disque.
- Homéomorphisme = application bijective continue + réciproque continue.



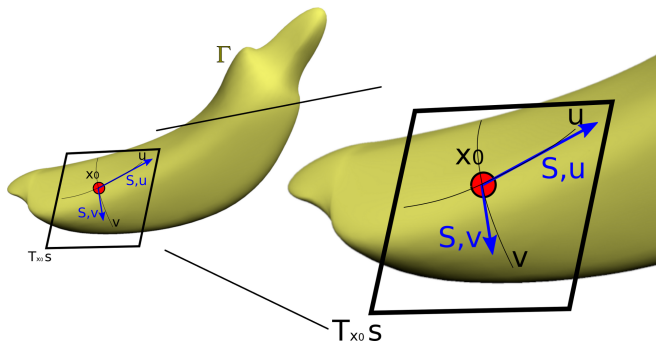
Notion de continuité

- Soit Γ la surface associée au mapping S .

$$S: \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto S(u, v) \end{cases}$$

$$\Gamma = tr_{\mathcal{D}}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (u, v) \in \mathcal{D}, S(u, v) = \mathbf{x}\}$$

- S est $\mathcal{C}^1$ ssi $S_{,u}$ et $S_{,v}$ sont définies et continues.
- S est $\mathcal{C}^2$ ssi $S_{,uu}$, $S_{,vv}$ et $S_{,uv}$ sont définies et continues.



- Γ est $\mathcal{G}^1$ si il existe un plan tangent partout.
- Γ est $\mathcal{G}^2$ si sa courbure est continue partout.

Remarque $S \subset \mathcal{C}^k \neq \Gamma \subset \mathcal{G}^k$.

$\mathcal{G}^2$ nécessaire pour reflets.

Exemple de continuité

$$f : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [-1, 0[\quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = t/2 \\ y(t) = t/2 \end{cases}, t \in [0, 2]$$

■ f est-elle $\mathcal{C}^2$? $\mathcal{G}^2$?

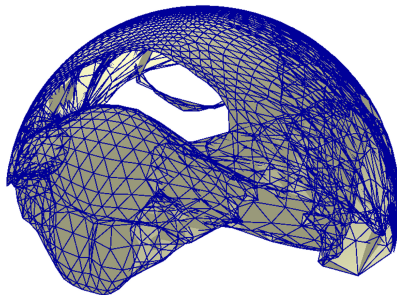
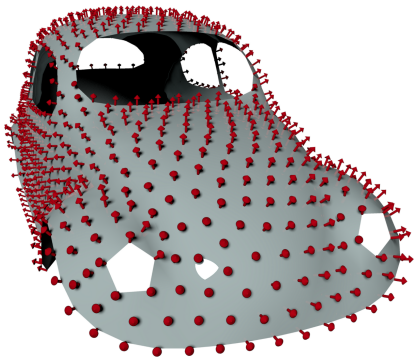
$$g : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in [-1, 0[\quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t^2 \end{cases}, t \in [0, 1]$$

■ g est-elle $\mathcal{C}^2$? $\mathcal{G}^2$?

Plan tangent

- Surface de $\mathbb{R}^3$: $S(u, v) = (S_x(u, v), S_y(u, v), S_z(u, v))$
- Normale : $n^S(u, v) = (S_{,u} \times S_{,v}) / \|S_{,u} \times S_{,v}\| \in \mathbb{S}^2$
- Espace tangent de S en x_0 :
 $T_{x_0} S = \text{Im}(DS(u, v)) = \{S_{,u}(u, v)h_u + S_{,v}(u, v)h_v | (h_u, h_v) \in \mathbb{R}^2\}.$
- Application de Gauss :

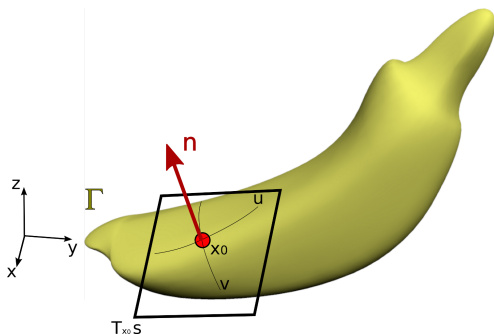
$$N : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ x_0 = S(u, v) & \mapsto N(x_0) = n(u, v) \end{cases}$$



Propriétés intégrales

Propriétés intégrales :

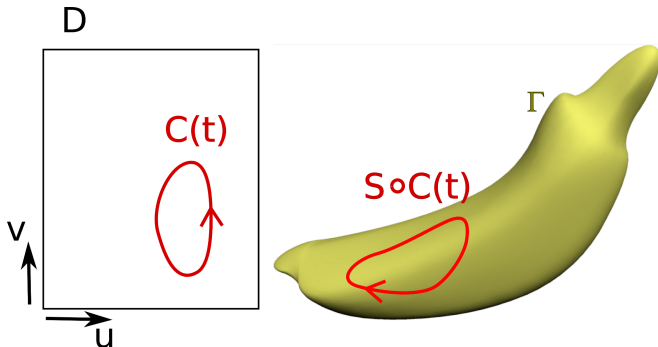
- Aire de Γ : $\int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} \|S_u \times S_v\| du dv$.
- Volume domaine défini par Γ : $\int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} S_z(u, v) n_z^S(u, v) du dv$



Première forme fondamentale

- Courbe $C \subset \mathcal{D}$ de longueur $L = \int_t \langle C'(t), C'(t) \rangle^{1/2} dt$.
- Longueur de $C_S = S(C_x, C_y)$

$$\begin{aligned} L_S &= \int_t \langle (S \circ C)'(t), (S \circ C)'(t) \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_t (C'^T(t) I_S(t) C'(t))^{1/2} dt \end{aligned}$$



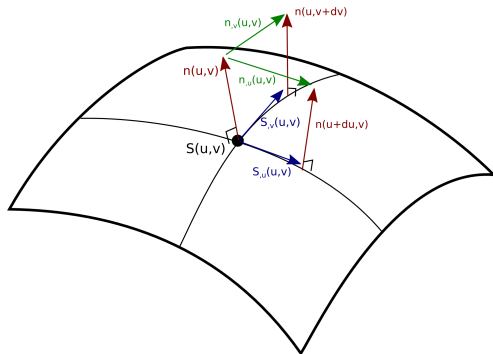
- I_S : Première forme fondamentale / tenseur métrique

$$I_S = \begin{pmatrix} S_{,u}^2 & \langle S_{,u}, S_{,v} \rangle \\ \langle S_{,u}, S_{,v} \rangle & S_{,v}^2 \end{pmatrix}$$

- I_S : forme quadratique associée à $\langle dS, dS \rangle$

- $\sqrt{\det(I_S)}$ = variation d'aire infinitesimale
 $\Rightarrow$ Aire de $\Gamma = \int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} \sqrt{\det(I)} \, du \, dv$

Dérivées des normales



Les vecteurs (S_u, S_v) et (n_u, n_v) définissent le même plan tangent.

Seconde forme fondamentale

Les vecteurs $(n_{,u}, n_{,v})$ peuvent s'exprimer dans le plan $(S_{,u}, S_{,v})$.

$$\begin{cases} n_{,u} = w_{00} S_{,u} + w_{01} S_{,v} \\ n_{,v} = w_{10} S_{,u} + w_{11} S_{,v} \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} n_{,u}^T \\ n_{,v}^T \end{pmatrix} = W_S \begin{pmatrix} S_{,u}^T \\ S_{,v}^T \end{pmatrix}$$

En multipliant par $(S_{,u}, S_{,v})$.

$$\Pi_S = W_S I_S$$

Avec Π_S la seconde forme fondamentale associée à S .

$$\Pi_S = \begin{pmatrix} \langle n_{,u}, S_{,u} \rangle & \langle n_{,u}, S_{,v} \rangle \\ \langle n_{,v}, S_{,u} \rangle & \langle n_{,v}, S_{,v} \rangle \end{pmatrix}$$

Par orthogonalité

$$\begin{cases} \langle n, S_{,u} \rangle = 0 \\ \langle n, S_{,v} \rangle = 0 \end{cases}$$

En dérivant

$$\begin{cases} \langle n_{,u}, S_{,u} \rangle = - \langle n, S_{,uu} \rangle \\ \langle n_{,v}, S_{,u} \rangle = - \langle n, S_{,uv} \rangle \\ \langle n_{,v}, S_{,v} \rangle = - \langle n, S_{,vv} \rangle \end{cases}$$

Expression de Π_S uniquement à partir de n et des dérivées secondes de S .

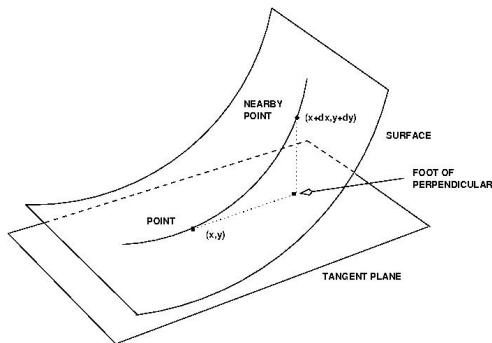
$$\Pi_S = - \begin{pmatrix} \langle n, S_{,uu} \rangle & \langle n, S_{,uv} \rangle \\ \langle n, S_{,uv} \rangle & \langle n, S_{,vv} \rangle \end{pmatrix}$$

Seconde forme fondamentale

- II forme quadratique associée à $\langle dS, dn \rangle$
= développement de Taylor de la surface dans le plan tangent.

$$\text{II}_S = \begin{pmatrix} \langle n, u, S, u \rangle & \langle n, u, S, v \rangle \\ \langle n, v, S, u \rangle & \langle n, v, S, v \rangle \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{II}_S = - \begin{pmatrix} \langle S, uu, n \rangle & \langle S, uv, n \rangle \\ \langle S, uv, n \rangle & \langle S, vv, n \rangle \end{pmatrix}$$



Application de Weingarten

La matrice W_S telle que

$$W_S = \Pi_S I_S^{-1}$$

est la matrice de Weingarten (ou Shape operator).

W_S est diagonalisable et possède des valeurs propres réelles.

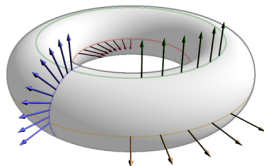
$$W_S = V^T \Lambda V ,$$

avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2 sont les courbures principales de la surface.

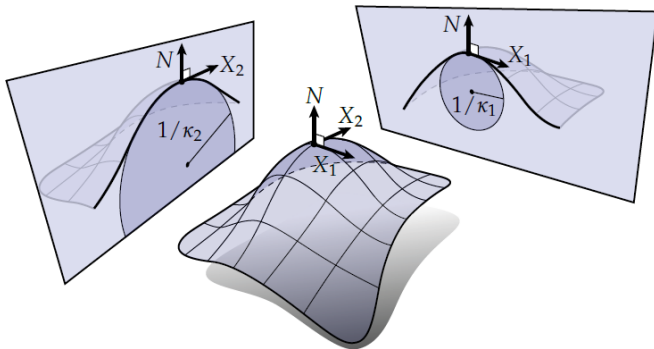
Rem. Application de Weingarten = différentielle de l'application de Gauss.



Wikipedia

Courbure principales

- Valeurs propres de W_S : courbures principales (λ_1, λ_2).
- Rayons de courbures principales ($r_1 = 1/\lambda_1, r_2 = 1/\lambda_2$).
- Vecteurs propres de W_S : directions ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$) des courbures principales.

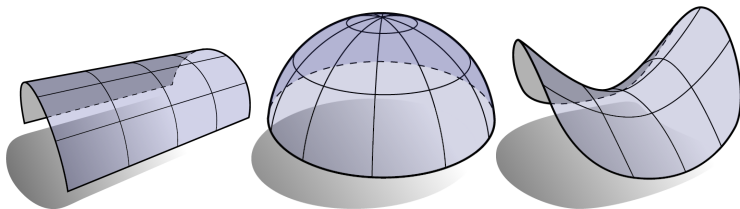


[Keenan Crane, Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus, SIGGRAPH 2013]

Types de courbures

Une surface peut être localement du type

- Planaire $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
- Cylindrique $|\lambda_i| > 0, \lambda_j = 0$.
- Parabolique $\text{sign}(\lambda_1) = \text{sign}(\lambda_2)$.
- Elliptique $\text{sign}(\lambda_1) = -\text{sign}(\lambda_2)$.



[Keenan Crane, Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus, SIGGRAPH 2013]

Courbures moyennes et de Gauss

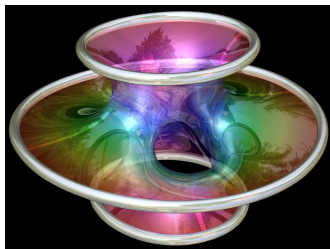
- Courbure de Gauss :

$$K_S = \kappa_1 \kappa_2 = \det(W_S) = \frac{\det(\Pi_S)}{\det(I_S)}$$

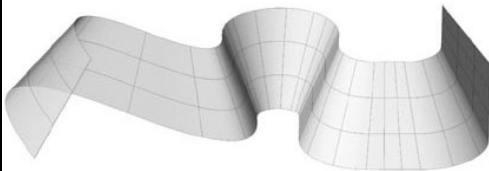
- Courbure moyenne :

$$H_S = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\text{tr}(W_S)$$

- $H = 0 \Rightarrow$ surface minimale
- 2 Surfaces isométriques on le même K
- $K = 0$ Surface développable



© Paul Nylander



M. Nettelblatt

Relation intégrale

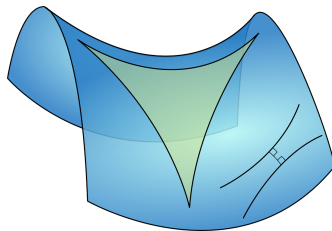
Théorème de Gauss-Bonnet :

$$\int_S K dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi\chi(S)$$

- k_g : courbure géodésique.
- χ : Caractéristique d'Euler (invariant topologique).

Application pour un polygone au voisinage d'un sommet :

$$\frac{1}{A} \left(\sum_i \theta_i - 2\pi \right) \simeq K$$



Wikipedia

