

Maillage

IMI, CPE Lyon

Maillage

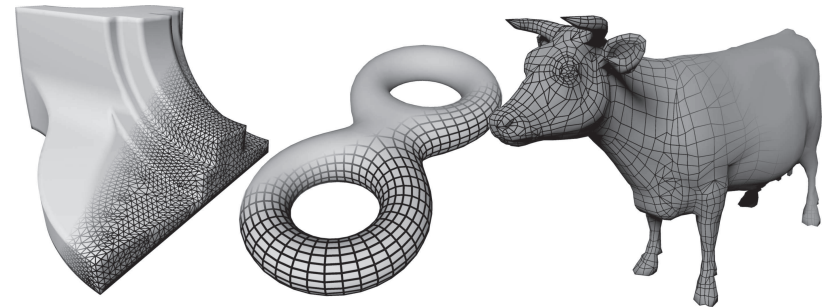
Plan du cours

- 1 Introduction Maillages polygonaux
- 2 Élement de base : Triangle
- 3 Description d'un maillage
- 4 Textures
- 5 Softwares

Maillage

Maillage

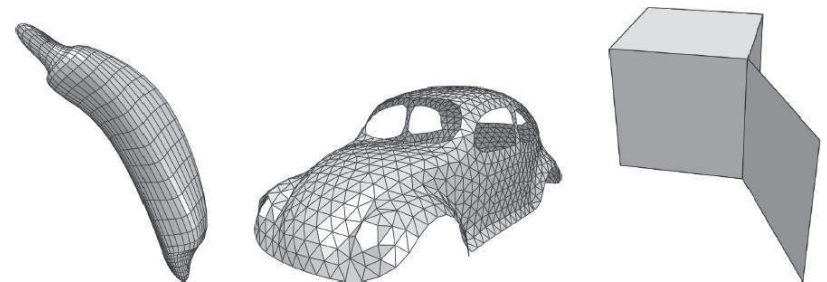
- Maillage (Mesh) = Ensemble de **polygones** partageants certains sommets
- N_f **faces**, N_s **sommets** (vertices), N_e **arêtes** (edges).
- **Triangulation** : toutes les faces sont des triangles.
- **Quad-mesh** : toutes les faces sont des quads.
- Poly-mesh : mélange de types.



Maillage

Topologie

- Rappel : Surface variété (Manifold) ssi le voisinage de tout point est homéomorphe à un (demi) disque.
⇒ Toute arête est partagée par au plus 2 faces (connectivité) + non auto-intersection (plongement).



Maillage

Maillage

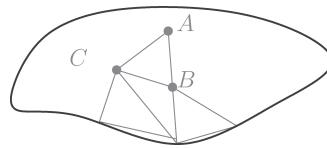
- Poly-mesh = cas particulier de triangulation
- Rappel : Triangulation = Mapping linéaire S

$$S_i : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto S_i(u, v) = u\vec{AB} + v\vec{AC} + \vec{OA} \end{cases}$$

$$\mathcal{D} : (u, v) \in [0, 1]^2, 0 \leq u + v \leq 1$$

Propriétés :

- Surface globalement $\mathcal{G}^0$.
- Surface jamais $\mathcal{G}^1$ (sauf plan).
- **Interpolation linéaire** de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ (normales, couleurs, textures).



Maillage

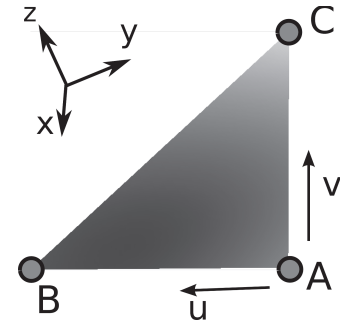
Interpolation linéaire

- Interpolation de couleurs

$$\begin{cases} r(u, v) = (1 - u - v)r_A + ur_B + vr_C \\ g(u, v) = (1 - u - v)g_A + ug_B + vg_C \\ b(u, v) = (1 - u - v)b_A + ub_B + vb_C \end{cases}$$

- Dans le cas général pour une fonction f

$$f(u, v) = (1 - u - v)f_A + uf_B + vf_C$$



Maillage

Coordonnées dans un triangle

- Position du point p par rapport aux sommets (A,B,C) ?

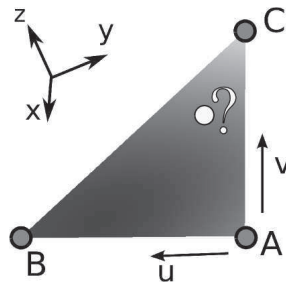
$$\vec{AP} = u\vec{AB} + v\vec{AC}$$

$$\Rightarrow P - A = u(B - A) + v(C - A)$$

$$\Rightarrow P = \underbrace{(1 - u - v)}_w A + uB + vC.$$

- (u, v, w) = Coordonnées barycentriques

$$\begin{cases} P = wA + uB + vC \\ u + v + w = 1 \\ 0 \leq (u, v, w) \leq 1. \end{cases}$$

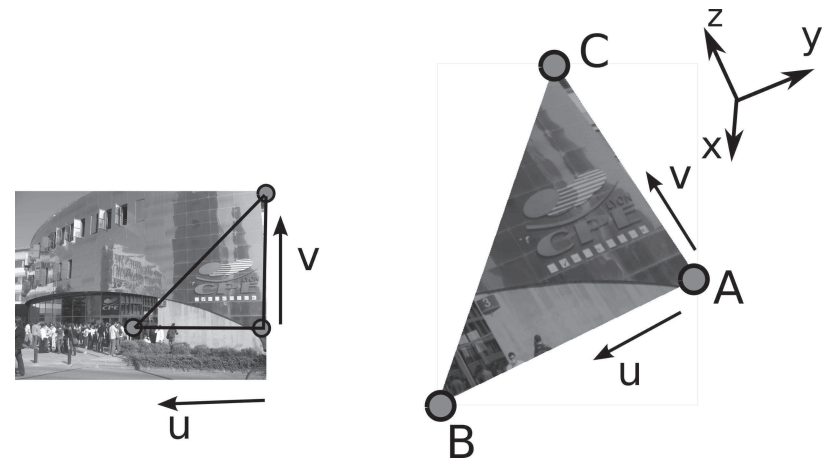


Maillage

Interpolation linéaire

- On peut interpoler des coordonnées !
⇒ Textures

$$\begin{cases} t_x = (1 - u - v)t_x(A) + ut_x(B) + vt_x(C) \\ t_y = (1 - u - v)t_y(A) + ut_y(B) + vt_y(C) \end{cases}$$



Maillage

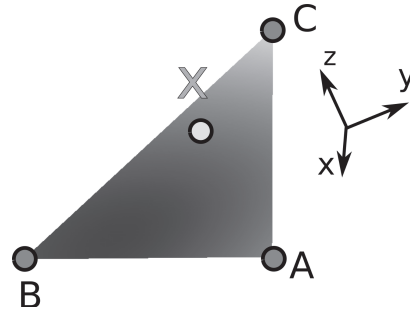
Coordonnées barycentriques

- Étant donné un point $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: connaître (α, β, γ) tel que $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_A + \beta\mathbf{x}_B + \gamma\mathbf{x}_C$, $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$.
 $\Rightarrow$ coordonnées barycentriques.

$$\begin{cases} A = \text{aire}(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A, \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) \\ A_1 = \text{aire}(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B, \mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \\ A_2 = \text{aire}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_C, \mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \\ A_3 = \text{aire}(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A, \mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \end{cases}$$

avec $\text{aire}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = 1/2 \|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1\|$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = A_1/A \\ \beta = A_2/A \\ \gamma = A_3/A \end{cases}$$



Maillage

Maillage

Structure de données :

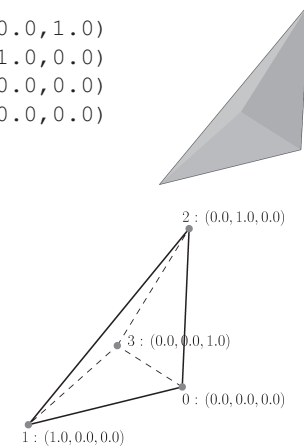
- Ex. Représenter un tétraèdre :

Idée 1 :

```
(0.0,0.0,0.0), (1.0,0.0,0.0), (0.0,0.0,1.0)
(0.0,0.0,0.0), (0.0,0.0,1.0), (0.0,1.0,0.0)
(0.0,0.0,0.0), (0.0,1.0,0.0), (1.0,0.0,0.0)
(0.0,1.0,0.0), (0.0,0.0,1.0), (1.0,0.0,0.0)
```

Il y a mieux :

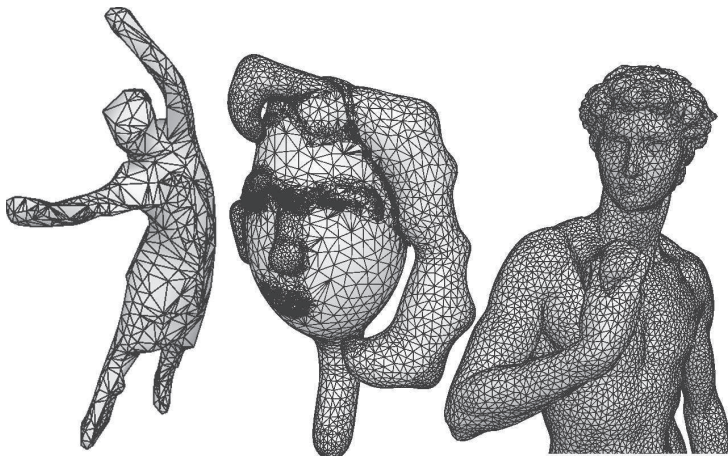
```
coordonnees:
(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)
Connectivite
(0,1,3)
(0,3,2)
(0,2,1)
(1,2,3)
```



Maillage

Qualité d'un maillage

- Triangulation : $\theta_{\min} \simeq 30^\circ$
 - Quads : $\theta_{\min} \simeq 45^\circ$
- Application : Calculs (FEM), (Rendu)

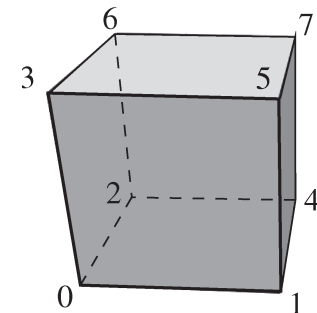


Maillage

Format off

Exemple de format d'échange. Format off.

```
OFF
8 6 12
0 0 0
1 0 0
0 1 0
0 0 1
1 1 0
1 0 1
0 1 1
1 1 1
4 0 1 4 2
4 1 5 7 4
4 3 6 7 5
4 2 6 3 0
4 2 4 7 6
4 0 3 5 1
```



Maillage

Structure de données

- Vecteurs contigus dans la mémoire : Affichage rapide en OpenGL.

```
// (x0,y0,z0,x1,y1,z1,...)
std::vector<double> vertex

// (i00,i01,i02,i10,i11,i12,...)
std::vector<int> connectivity

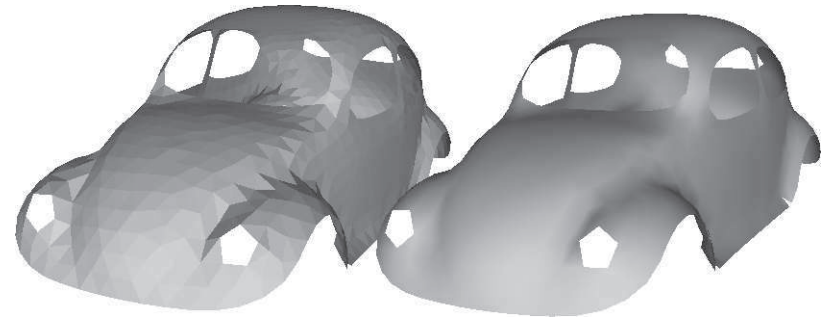
std::vector<double> normal, color, texture ...
```

- Accès à la coordonnée y du sommet k .
`vertex[3*k+1]`
- Accès à la coordonnée y du sommet s (1,2 ou 3) du triangle t .
`vertex[3*connectivity[3*t+s]+1]`

Maillage

Normales

- En OpenGL : 1 Normale interpolé par sommets
⇒ Normale par polygone = Plusieurs normales par sommet



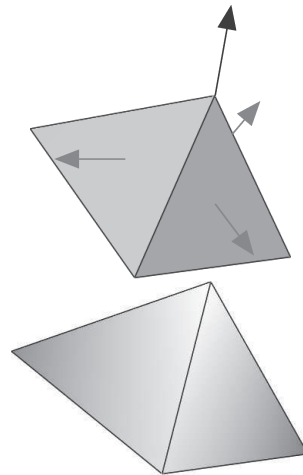
Maillage

Normale d'un maillage

- Aspect lisse
⇒ 1 normale par sommet.
- Moyenne de normales (faux mais répandue)

$$\mathbf{n}_k = \frac{\sum_{i \in \mathcal{V}(k)} \mathbf{n}_i}{\left\| \sum_{i \in \mathcal{V}(k)} \mathbf{n}_i \right\|}$$

k : indice sommet
 i : indice face
 $\mathcal{V}(k)$: faces voisines du sommet k



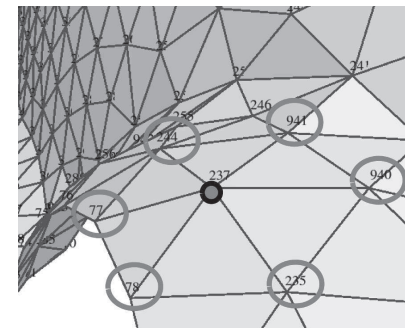
Maillage

Structure de données : Voisinage

- 1-Voisinage = Sommets voisins d'un sommet donné

```
std::vector<std::vector<int>> one_ring

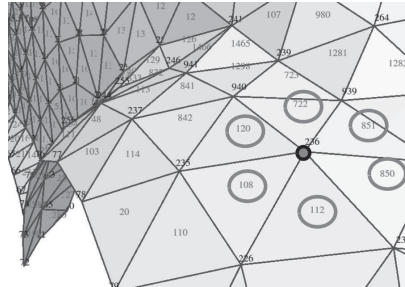
// exemple pour le cube:
one_ring[0] = [1,2,3]
one_ring[1] = [5,4,0]
...
```



Maillage

Voisinage

- Triangles voisins d'un autre
- Triangles voisins d'un point : étoilé (1-star)
⇒ calcul des normales !

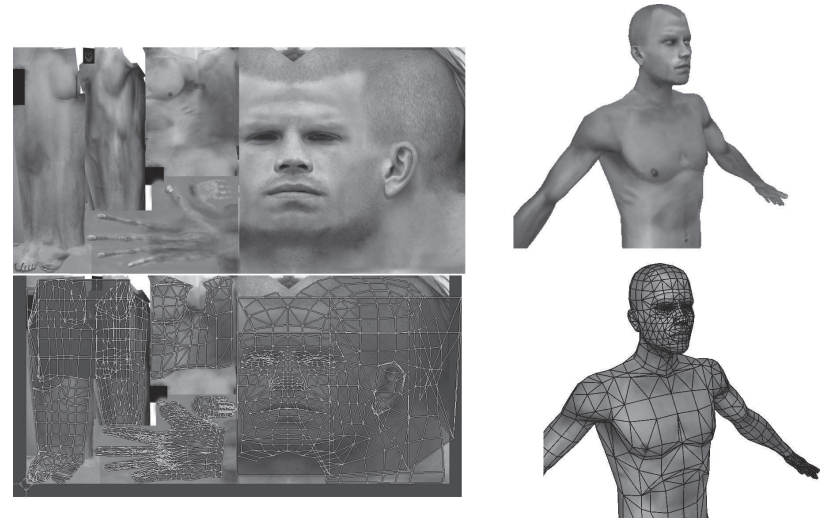


! Attention aux structures de données.
Compromis entre : temps accès / temps recherche / espace mémoire / facilité ...

Maillage

Textures

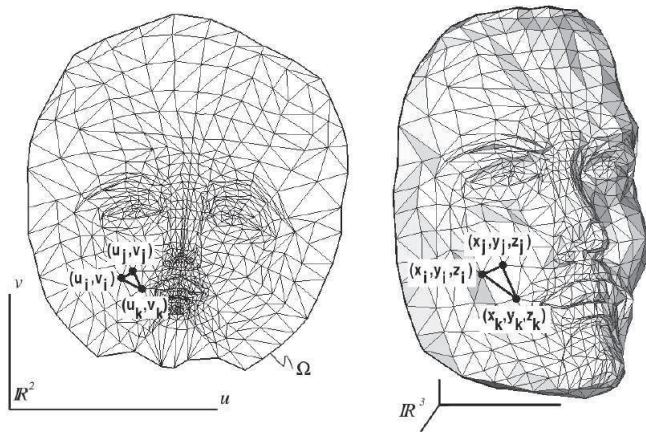
- Morceaux se recouvrants = atlas (charts).



Maillage

Paramétrisation / Textures

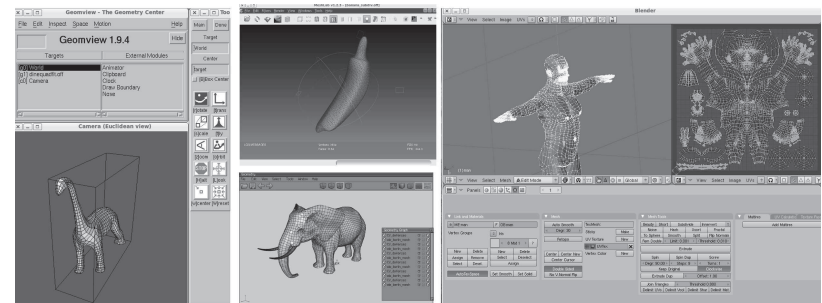
- Paramétrisation d'un maillage = Construction de S (par morceaux) étant donné Γ .



[Botsh, Pauly, Kobbelt, Alliez, Lévy, SIGGRAPH Course Notes 2007]

Maillage

Softwares



- Geomview (Viewer)
- Meshlab (Mesh Processing)
- Wings3D (Subdivision)
- Blender (Artiste)

Maillage