

Maillage avancé

IMI, CPE Lyon

Maillage avancé

Plan du cours

- Caractéristiques topologiques.
- Structure de données avancées : Halfedge.
- Subdivision de maillage.
- Notion de calcul sur variété : Lissage Laplacien.

Maillage avancé

Caractéristique topologique

Maillage avancé

Caractéristique d'Euler-Poincaré

- Maillage à N_f faces, N_s sommets, N_a arêtes.

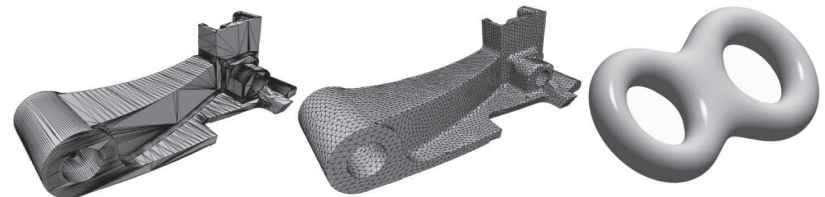
$$N_s - N_a + N_f = \chi = 2(c - g) - b$$

χ : Caractéristique d'Euler (Rappel : Gauss-Bonnet).

c : Nbr composante connexes

g : Nbr de trous (genre topologique)

b : Nbr de bords



Hetroy

Wikipedia

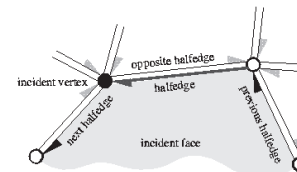
Maillage avancé

Structure de données

Maillage avancé

Encodage Halfedge

- Encodage Demi-Arêtes (Halfedge)
- Encodage des arêtes : On retrouve les faces par parcours (variété).
- Ajout/suppression en $\mathcal{O}(1)$.



Vertex	Halfedge	Face
Halfedge_handle halfedge()	Halfedge_handle opposite()	Halfedge_handle halfedge()
	Halfedge_handle next()	
	Halfedge_handle prev()	
	Vertex_handle vertex()	
	Face_handle face()	

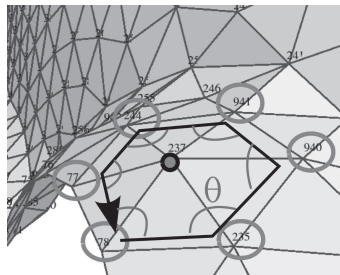
CGAL

Maillage avancé

Limitation encodage indexé

Encodage géométrie + connectivité indexée

- + Affichage rapide (si contigu)
- + Générique
- + Simple
- Voisinage non encodé
- Ajout/suppression en $\mathcal{O}(N)$.



```

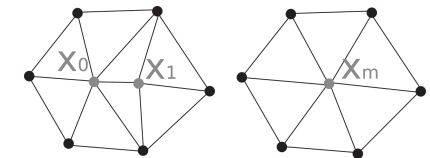
OFF
40 05 75
-0.175114 -0.047799 -0.045492
-0.199566 0.739914 -0.064795
-0.010689 0.674496 0.008990
-0.015538 0.153071 0.107498
-0.070148 0.767894 -0.116107
-0.053836 -0.782815 0.109714
-0.162416 -0.785481 0.088914
-0.112365 -0.782402 0.135402
-0.248028 0.031451 0.031956
-0.259289 0.209557 0.035420
0.296891 -0.707385 0.143375
-0.190129 0.069062 0.109358
-0.010148 0.024179 -0.067283
-0.112968 -0.089127 0.092391
-0.185828 0.377372 -0.111155
3 29 4 1
3 34 11 13
3 12 30 0
3 30 13 17
3 23 22 21
3 29 38 17
3 32 0 13
3 14 0 37
3 24 4 21
3 14 32 1
3 24 2 22
3 3 12 25
3 4 24 15
3 21 15 26
3 35 34 13
3 19 32 13
3 19 13 27

```

Maillage avancé

Edge Collapse

- Suppression d'arête (edge collapse) = Base de la simplification de maillage



CGAL

Maillage avancé

Encodage Halfedge comparaison

Choisir la structure la plus adaptée :

■ Tableaux d'indices (vecteurs contigus)

- + Simple, général, adapté GPU.
- + Accès aléatoire $\mathcal{O}(1)$.
- Parcours voisinage en $\mathcal{O}(N)$.
- Ajout/Suppression $\mathcal{O}(N)$.

■ Halfedge

- + Parcours voisinage en $\mathcal{O}(1)$.
- + Ajout/Suppression en $\mathcal{O}(1)$.
- Technique, variété uniquement, encodage non contigu.
- Accès aléatoire en $\mathcal{O}(N)$.

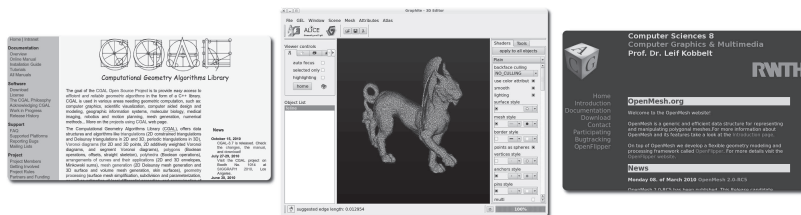
```
Halfedge_handle g = h->next()->opposite()->next();
P.split_edge( h->next());
P.split_edge( g->next());
P.split_edge( g);
h->next()->vertex()->point() = Point( 1, 0, 1);
g->next()->vertex()->point() = Point( 0, 1, 1);
g->opposite()->vertex()->point() = Point( 1, 1, 0);
Halfedge_handle f = P.split_facet( g->next(),
                                   g->next()->next()->next());
Halfedge_handle e = P.split_edge( f);
e->vertex()->point() = Point( 1, 1, 1);
P.split_facet( e, f->next()->next());
```

Maillage avancé

Subdivision

Maillage avancé

Librairies implémentant le Halfedge

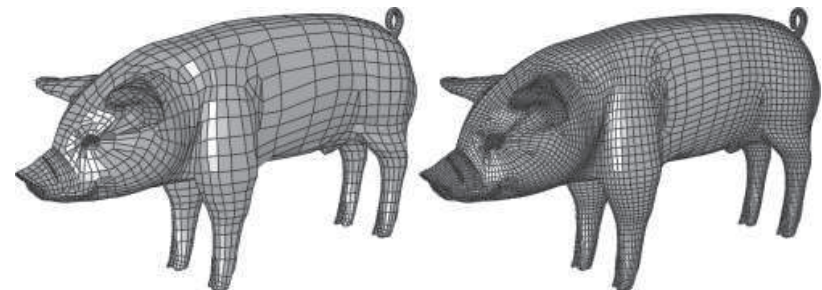


- CGAL (C++ complexe, calcul exact, beaucoup d'algos)
- Graphite (remaillage, paramétrisation, GUI)
- OpenMesh (plus simple que CGAL, moins complet)

Maillage avancé

Subdivision de maillage

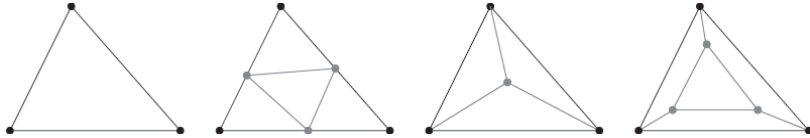
- Raffiner pour : rendu, calcul, déformer, ...
- Voir cours SIGGRAPH



Maillage avancé

Subdivision de maillage

- Subdivision de la connectiv  .
- Plusieurs possibilités de subdivision.

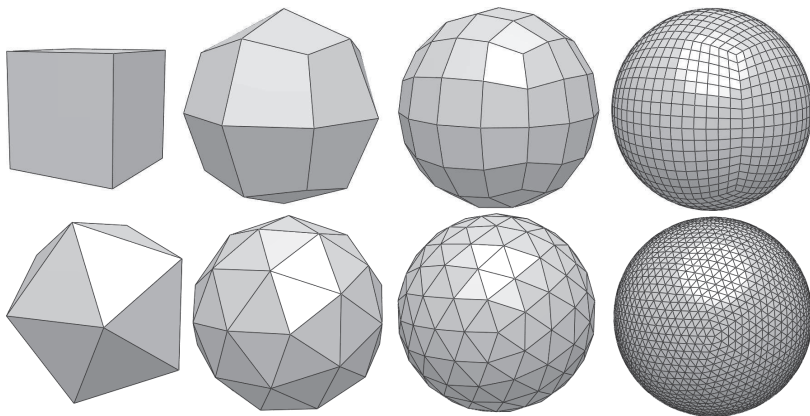


- Présences de polygones quelconques ...
- Structure de données !
- Géométrie
 - Schémas interpolants
 - Schémas approximants

Maillage avancé

Subdivision de maillage

- Application à la génération d'une sphère par projection :

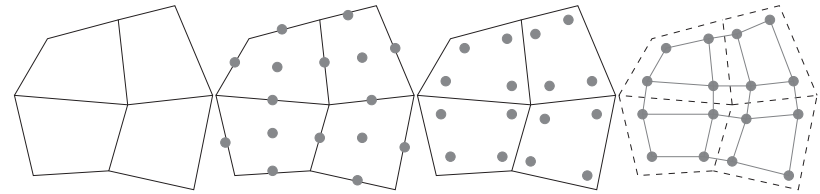


Maillage avancé

Subdivision

Exemple : Doo-Sabin

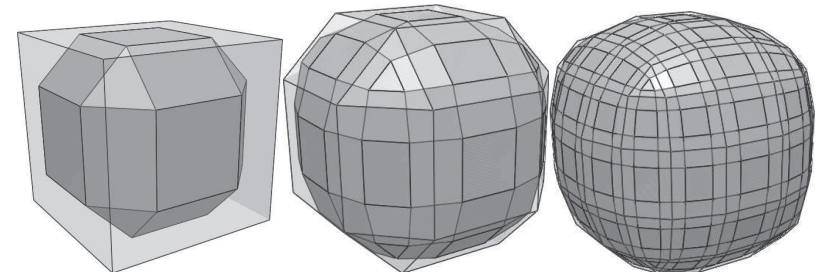
- 1 Soit une face formée par $(x_i)_{i=0, N-1}$.
- 2 Construit sommets milieux $m_i = (x_i + x_{i+1})/2$.
- 3 Barycentre de la face $b = (\sum_i x_i)/N$.
- 4 Nouveaux sommets = $n_i = (x_i + m_i + m_{i-1} + b)/4$.



Maillage avancé

Subdivision

Exemple : Doo-Sabin

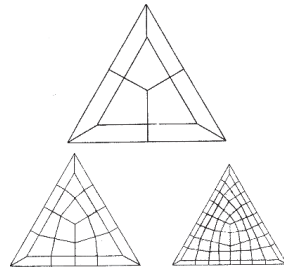


Maillage avancé

Catmull-Clark

- Un sommet de face = barycentre de l'ancienne face
- Un sommet d'arête = moyenne entre le milieu des anciens sommets et le milieu des faces partageant l'arête
- Nouvelle position du sommet = $\frac{Q+2R+S(n-3)}{n}$

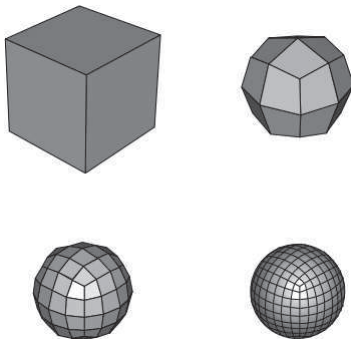
- Q : Moyenne des sommets de face adjacents
- R : Moyenne des points milieux des arêtes incidentes
- S : Anciennes coordonnées
- n : valence



Maillage avancé

Catmull-Clark Resultats

- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Basé de préférence sur des quads

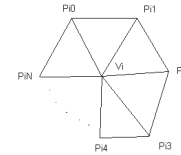


Maillage avancé

Loop

Maillage Triangulaire

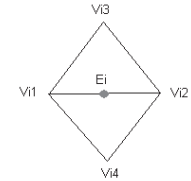
- Nouvelle Position



$$V^{i+1} = (1 - n\alpha)V^i + \alpha \sum_{k=0}^n P_k$$

$$\alpha = \frac{1}{n} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right)^2 \right)$$

- Sommets d'arêtes

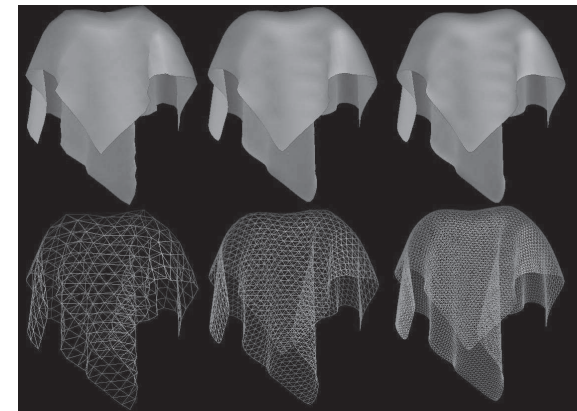


$$E^{i+1} = \frac{3}{8}(V_1 + V_2) + \frac{1}{8}(V_3 + V_4)$$

Maillage avancé

Loop

- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles

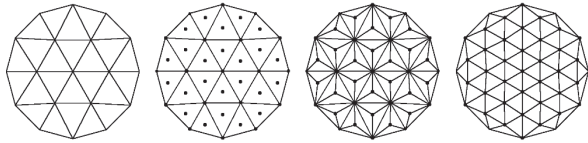


Fisher

Maillage avancé

$\sqrt{3}$ -Kobbelt

Maillage Triangulaire



- Nouveaux sommets : barycentre de l'ancienne face
- Nouvelle position du sommet i :

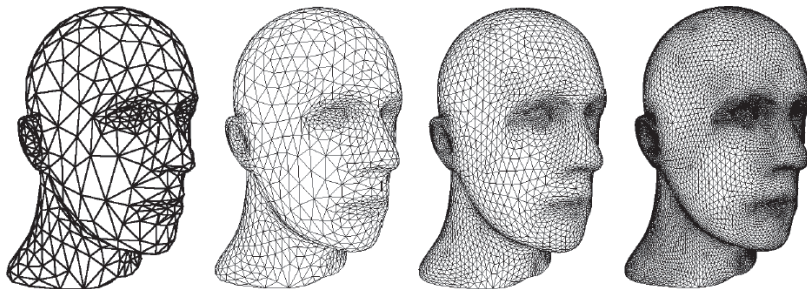
$$(1 - \alpha_n)p_i + \frac{\alpha_n}{n} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} p_j \quad (n=\text{valence}, \mathcal{V}=\text{voisinage})$$

$$\text{et } \alpha_n = \frac{4 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{9}$$

Maillage avancé

$\sqrt{3}$ -Kobbelt

- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles



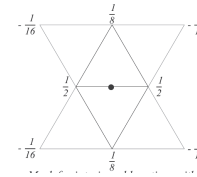
[Kobbelt, SIGGRAPH 00]

Maillage avancé

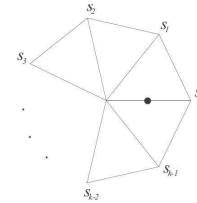
Butterfly

Maillage Triangulaire

- Sommet régulier



- Sommet non régulier



- Ajout d'un point par coté
- Dans le cas d'un sommet non régulier :

$$s_i = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{4} + \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{k}\right) \right) \quad \text{pour } k > 5$$

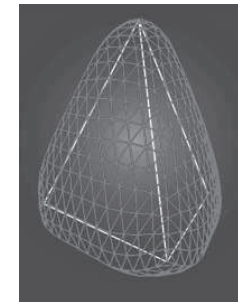
$$s_0 = \frac{5}{12}, s_{1,2} = -\frac{1}{12} \quad \text{pour } k = 3$$

$$s_0 = \frac{3}{8}, s_2 = -\frac{1}{8}, s_{1,3} = 0 \quad \text{pour } k = 4.$$

Maillage avancé

Butterfly

- C^1 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'interpolation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles

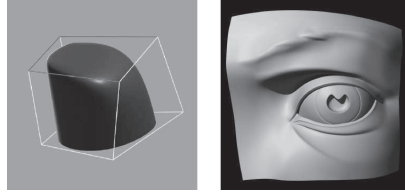


Maillage avancé

Subdivision : Arêtes vives

- Ne pas lisser toutes les arêtes :

[De Rose, Kass, Truong.
**Subdivision Surfaces in
Character Animation.** ACM
SIGGRAPH. 1998]



© Pixar, Gery's Game

Maillage avancé

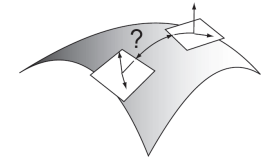
Lissage Laplacien

Maillage avancé

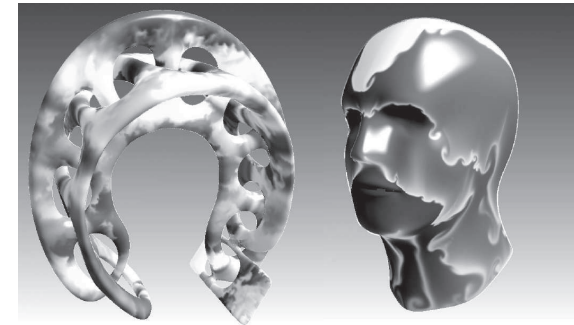
Lissage Laplacien

- Soit f définie sur une variété différentielle (surface lisse).

$$f : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \mathbb{R}^N \\ (\xi_1, \xi_2) & \mapsto f(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$



- Calcul différentiel ?
- Problème : Comparer vecteurs dans différents espaces



Maillage avancé

Calcul différentiel sur variété

- Opérateur de Laplace-Beltrami = Laplacien sur une variété

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(I_\Gamma)}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{\det(I_\Gamma)} \sum_j I_\Gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

- Cas particulier : Laplacien des propres coordonnées !
 $f = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = (x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2), z(\xi_1, \xi_2))$
- $\text{Sp}(\Delta \mathbf{x}) = \text{modes de vibrations propres} = \text{Base de Fourier}$
Théorie Spectrale



[Vallet, Levy, Eurographics 08]

Maillage avancé

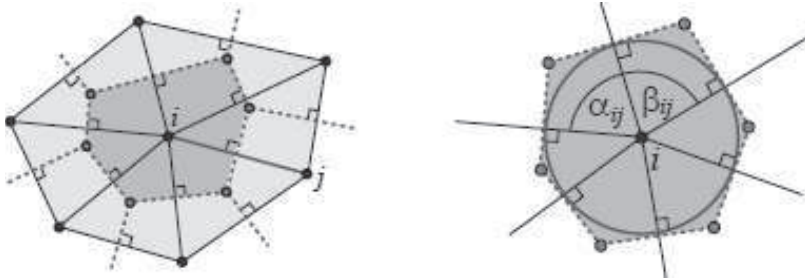
Lissage Laplacien

- Filtre passe bas = Convolution par filtre Gaussien en 2D = Solution de l'équation de diffusion (voir *Scale Space theory*).

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Delta \mathbf{x}$$

- Comment approximer Δ sur un maillage ?
⇒ Plusieurs solutions, aucune parfaite.

[Wardetzky, Mathur, Kalberer, Grinspun. **Discrete Laplace Operators : No Free Lunch.** SGP 07]

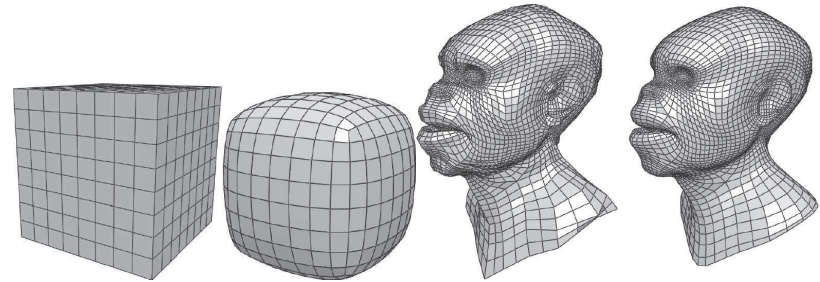


Maillage avancé

Lissage Laplacien

- Algorithme du lissage laplacien :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mu \bar{\mathbf{x}} + (1 - \mu) \mathbf{x}^k$$

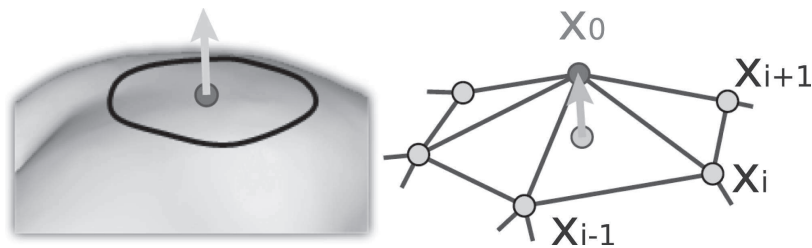


Maillage avancé

Lissage Laplacien

- Approximation la plus simple :

$$\Delta \mathbf{x}(\mathbf{x}_0) \simeq \frac{1}{N} \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$$



[Sorkine, Eurographics 05]

Maillage avancé