

Equations différentielles et champs de vecteurs

Formulation

Cas particulier des equations du type

$$\begin{cases} x'(t) = f_x(t) \\ y'(t) = f_y(t) \end{cases}$$

Avec condition initiale: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Exemple

Ex. équation Lokta-Volterra (proie-prédateur)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = -y(t) (\gamma - \delta x(t)) \end{cases}$$

t : temps

$x(t)$: effectif des proies

$y(t)$: effectif des prédateurs

$x'(t)$: variation des effectifs
des proies

$y'(t)$: variation des effectifs
des prédateurs

α : taux de reproduction des proies

β : taux de mortalité des proies

γ : taux de mortalité des prédateurs

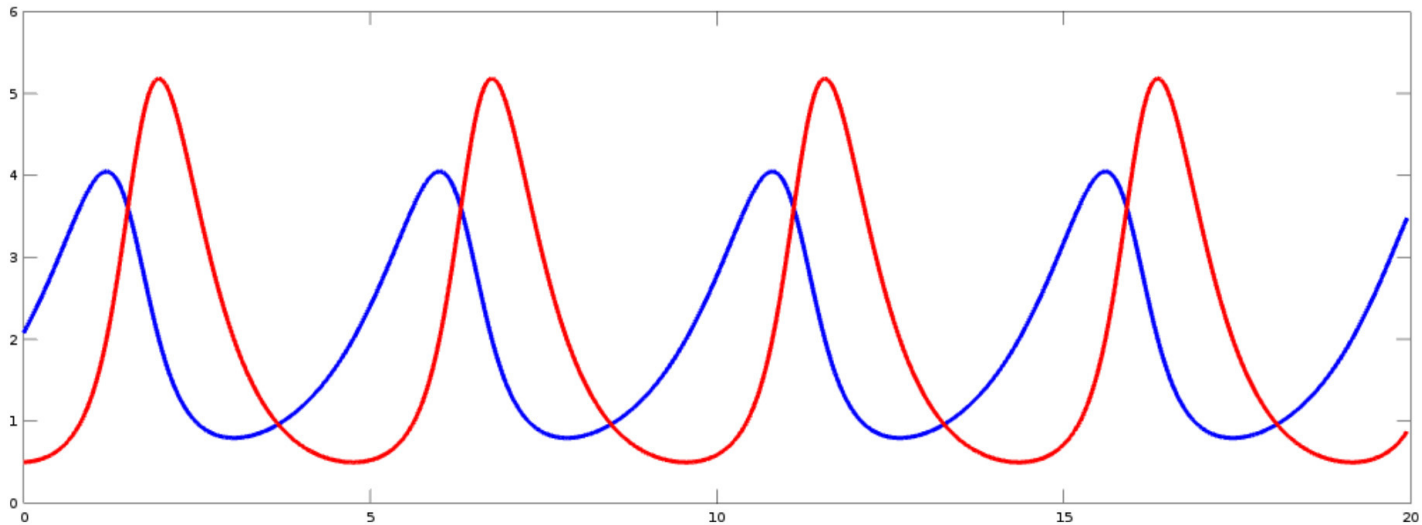
δ : taux de reproduction des prédateurs

Trajectoires solutions

$$x'(t) = x(t) (\alpha - \beta y(t))$$

$$y'(t) = -y(t) (\gamma - \delta x(t))$$

— prédateurs
— proies

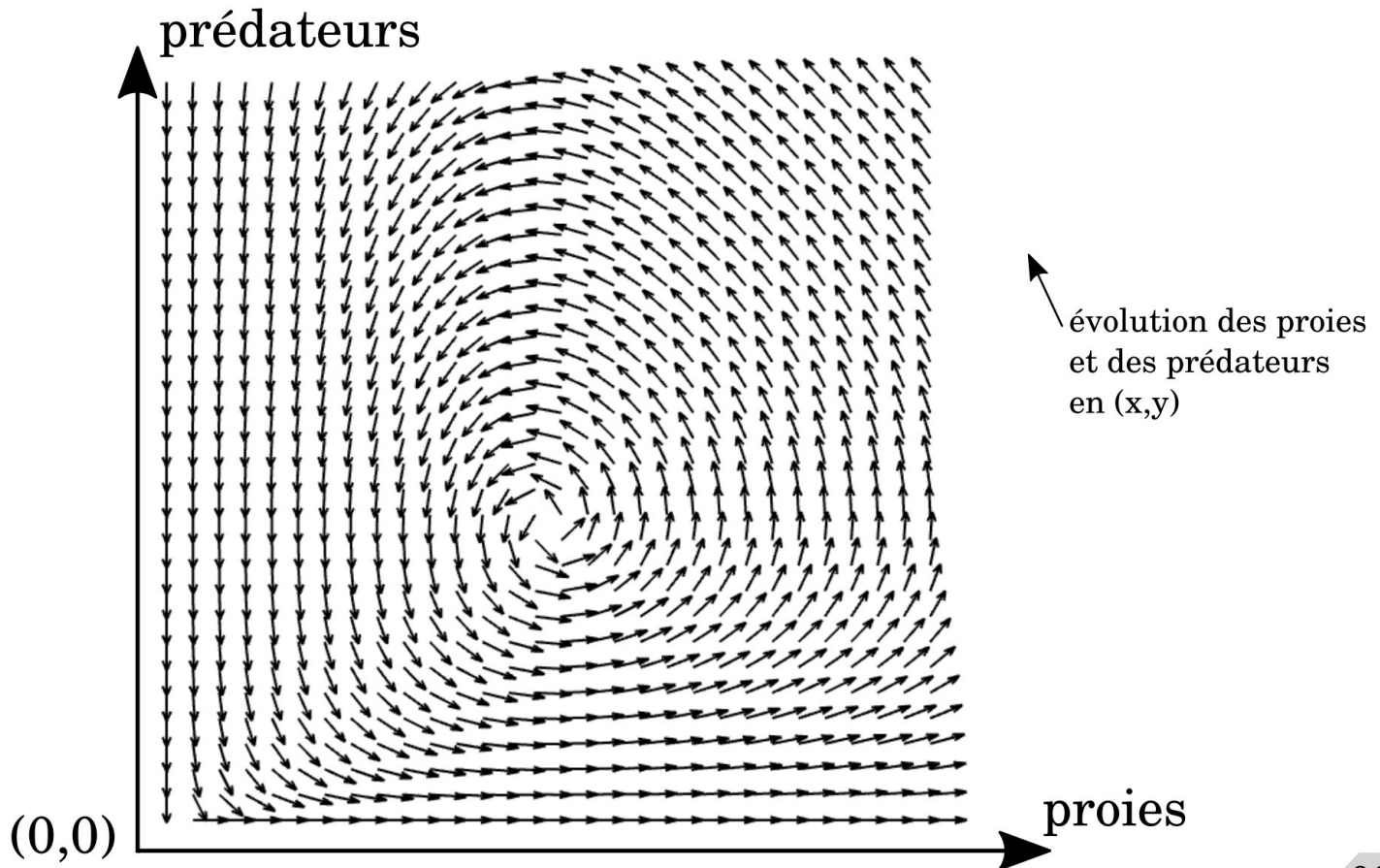


Qu'en est-il pour d'autres (x_0, y_0) ?

Champs de vecteurs

On trace le champ de vecteurs

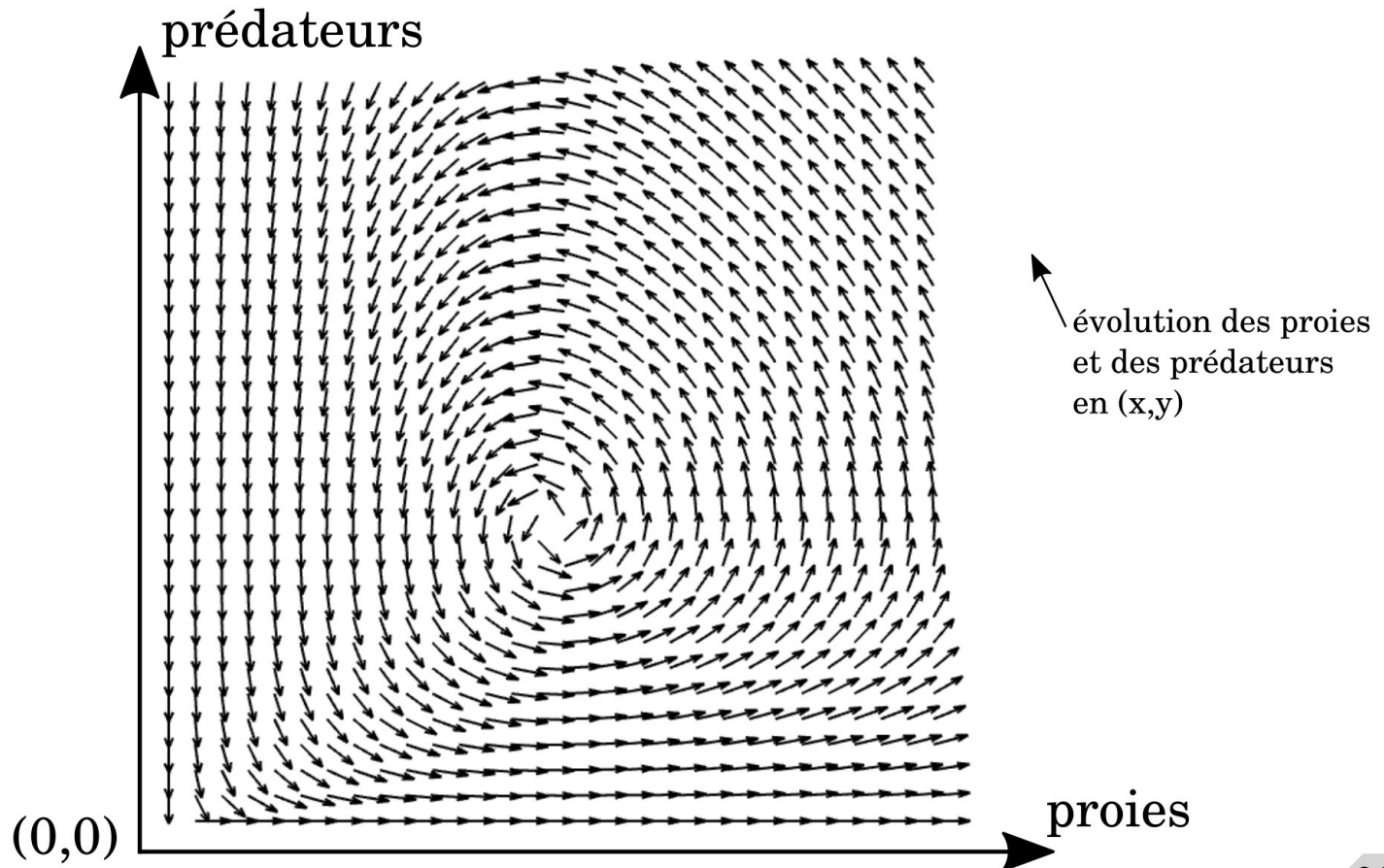
$$F : (x, y) \mapsto (f_x(x, y), f_y(x, y))$$



Champs de vecteurs

On trace le champ de vecteurs

$$F : (x, y) \mapsto (f_x(x, y), f_y(x, y))$$



Champs de vecteurs

On trace le champ de vecteurs

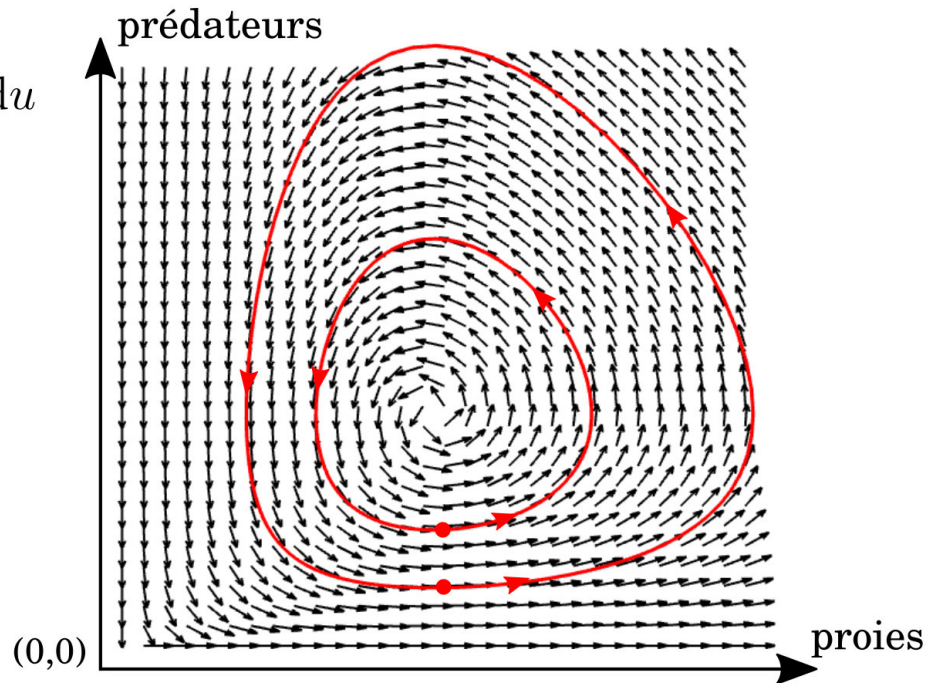
$$F : (x, y) \mapsto (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

La trajectoire de $x(t)$, $y(t)$ solution de l'équation différentielle sont les lignes intégrales du champ de vecteur.

$$(x(t), y(t)) = \int_u (f_x(u), f_y(u)) \, du$$

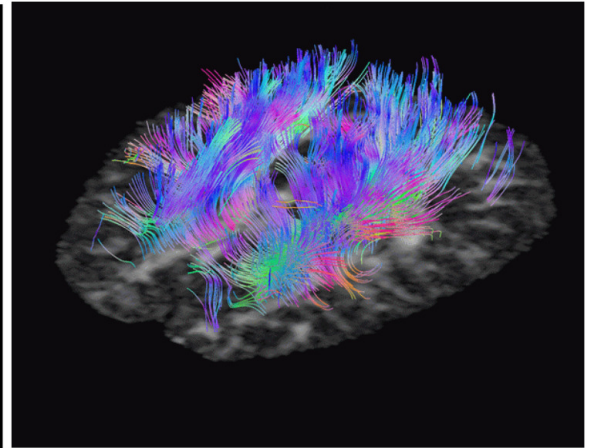
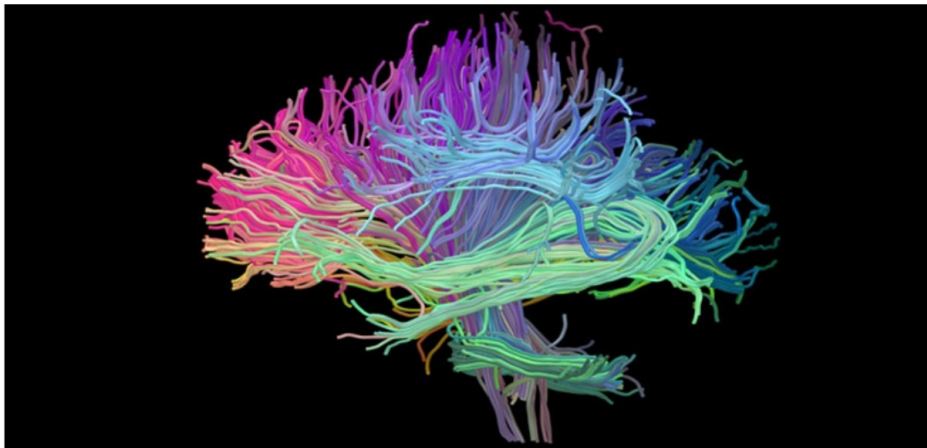
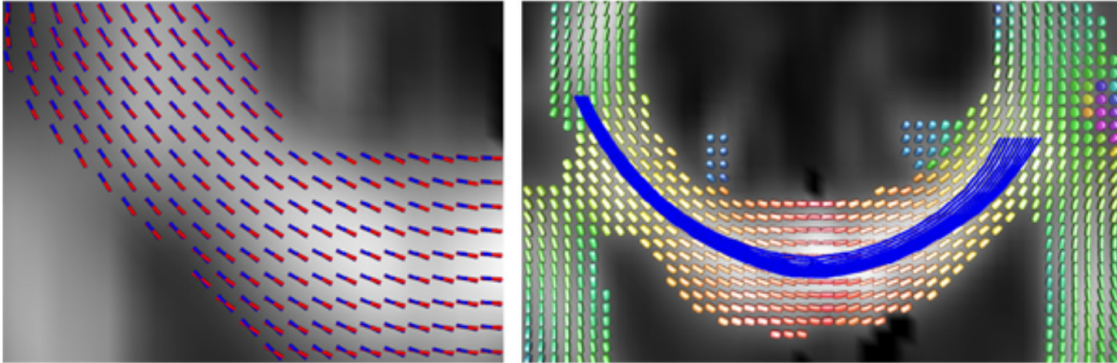
$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$



Exemples d'application

Tenseurs de diffusions : Imagerie du cerveau



Exemples d'application

Tenseurs de diffusions : Imagerie du coeur

