

Equations aux dérivées partielles

Principe

Relations entre plusieurs dérivées

ex. $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ inconnue $x \in \mathcal{D}, t \geq 0$

On cherche à résoudre $F \left(\frac{\partial^n f}{\partial t^n}, \frac{\partial^m f}{\partial x^m}, x, t \right) = 0$

F peut être linéaire, ou non linéaire.

Avec les conditions initiales $f(x, 0) = f_0(x)$

Et les conditions aux limites

$$\forall z \in \partial \mathcal{D}, f(z, t) = f_z(t)$$

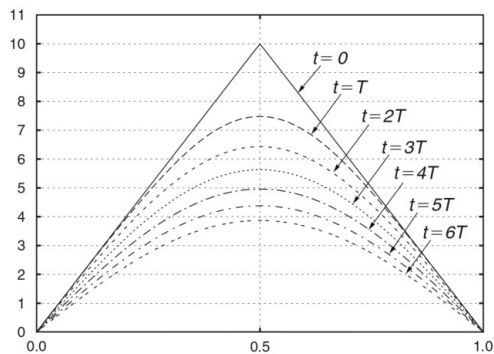
(condition de Dirichlet)

Quelques équations classiques

Equation de diffusion de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

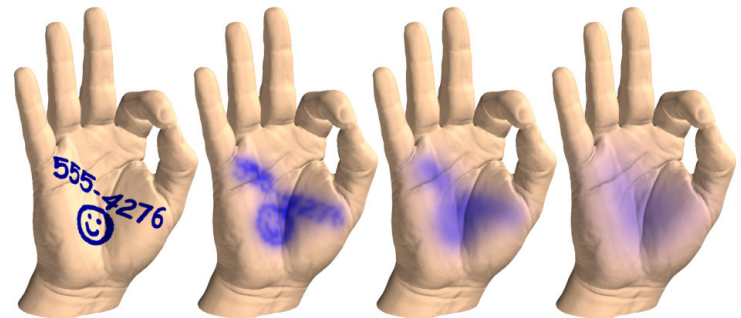
Version 1D simple



$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \Delta f$$

Version 2D, 3D.

D : Coefficient/Tenseur de diffusion



Equation de Poisson

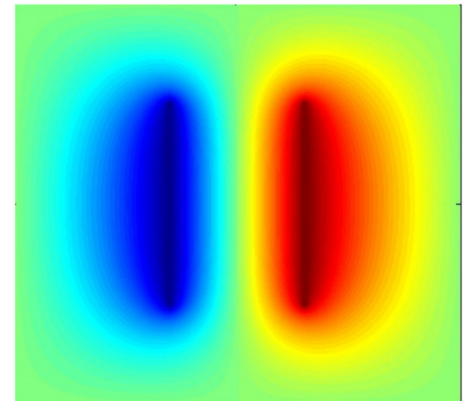
$$\Delta f(x) = \phi(x) \quad \text{Pas de variable temporelle}$$

electrostatique,
champ gravitation,
reconstruction de surfaces,
...

$$\text{Cas particulier: } \Delta f(x) = 0$$

Equation de Laplace

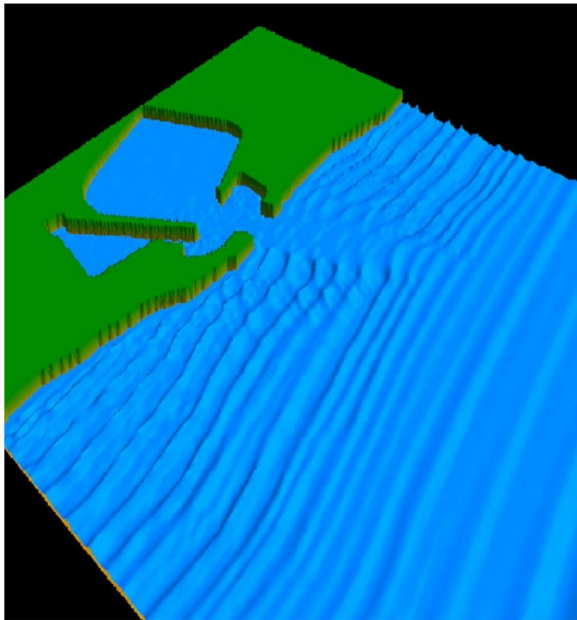
Solution = fonction harmoniques



Equation de Propagation des ondes

$$c^2 \Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

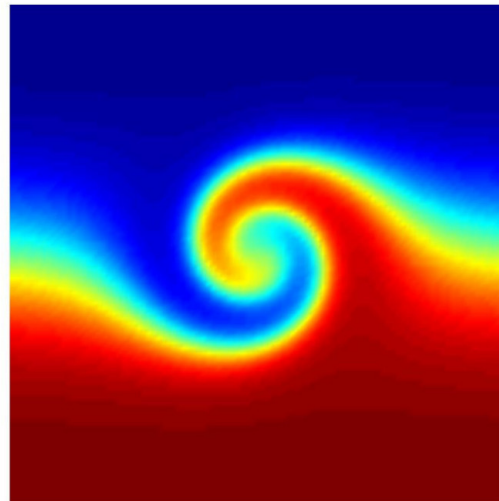
c: vitesse de propagation de l'onde



Equation d'advection

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f v) = 0$$

Déplacement d'une fonction $f(x,t)$ (fonction scalaire) suivant le champs de vitesse v .

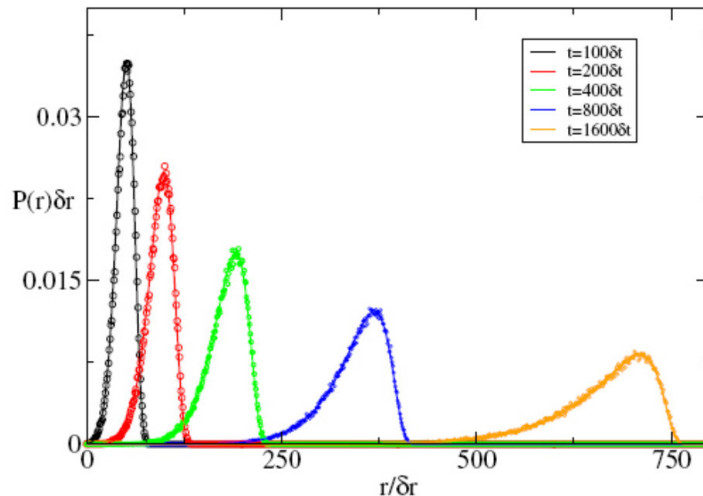


Equation de Burger

Equation du traffic

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (f)^2}{\partial x} = 0$$

Développement d'ondes de chocs
(mécanique des fluides, acoustique, traffic, etc)



Equation de Navier Stokes

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{(f \cdot \nabla)}_{\text{advection}} f - \underbrace{\eta \Delta f}_{\text{diffusion}} = g$$

$$\nabla \cdot f = 0 \quad \text{Incompressibilité}$$

Catégorisation

Equations linéaires d'ordre 2

par analogie avec:

Parabolique $\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$y = ax^2$$

- Equation de diffusion
- > Solution lisse

Hyperbolique $a \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$$

- Equation des ondes
- > Solution qui se propage à vitesse finie

Elliptique $a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 0$$

- Equation de Poisson / Laplace
- > Vitesse infinie de propagation sur le domaine

Méthodes numériques

3 Grandes approches:

- Différences finies

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- échantillonne sur une grille
- considère valeurs constantes entre deux échantillons

+ Le plus simple, générique
- Convergence, précision

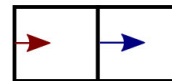
- Elements finis (FEM)

$$f(x) = \sum_i \omega_i \phi_i(x)$$

- suppose une solution linéaire par morceaux
- réécrit l'équation sous la forme d'un système linéaire continue de contraintes. (solution faible)
- résout l'équation par système linéaire

+ Précision, critère de convergences
- Mise en oeuvre

- Volumes finis



+ Méthode conservative
- Cas particulier

- variante des différences finies
- échantillonne sur une grille
- intègre l'équation entre deux échantillons

Exemple différences finies

Equation de la diffusion de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \quad \begin{array}{l} x \in [0, 1] \\ t \geq 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} f(x, 0) = f_0(x) \\ f(0, t) = 0 \\ f(1, t) = 0 \end{array} \right.$$

Discrétisation explicite :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \simeq \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \simeq \frac{f(x + \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

Exemple différences finies

Equation de la diffusion de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \quad \begin{array}{l} x \in [0, 1] \\ t \geq 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} f(x, 0) = f_0(x) \\ f(0, t) = 0 \\ f(1, t) = 0 \end{array} \right.$$

$$f(x, t + \Delta t) = (1 - 2r) f(x, t) + r (f(x, t + \Delta t) + f(x, t - \Delta t))$$
$$r = c \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

En posant: $(u^i)_k = f(k\Delta x, i\Delta t)$

Relation matricielle $\boxed{u^{i+1} = M u^i}$

$$M = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & r & 1-2r & r \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

Analyse de stabilité

Rappel $u^{i+1} = M u^i$

ne diverge pas si ses valeurs propres sont < 1 .

La matrice $A = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & a & b & c \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & a & b \end{pmatrix}$ a pour valeur propre

$$\forall j \in [1, N] \quad \lambda_j = b + 2\sqrt{ac} \cos \frac{\pi j}{N+1}$$

$$\text{et vecteur propre } [v_j]_k = \sqrt{\frac{a}{c}} \sin \left(\frac{\pi j k}{N+1} \right)$$

Analyse de stabilité

Ici $a=c=r$, $b=1-2r$

$$\Rightarrow \forall j \in [1, N], \left| 1 - 2r + 2r \cos \frac{\pi j}{N+1} \right| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 1 - 2r \left(\cos \frac{\pi j}{N+1} - 1 \right) < 1$$

$$\Rightarrow 0 < r < \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi j}{N+1}}$$

$$\Rightarrow 0 < r < \frac{1}{2}$$

Analyse de stabilité

$$r < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2c}$$

Condition très restrictive sur le pas de temps.

ex.

1s d'animation, $c=1$, 100 échantillons.

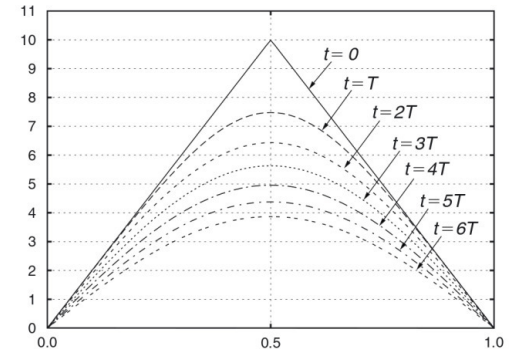
$$\Delta x = 0.01 \quad \Delta t_{\max} = 5 \cdot 10^{-5}$$

Soit 20 000 itérations

1s d'animation, $c=1$, 1000 échantillons.

$$\Delta x = 0.01 \quad \Delta t_{\max} = 5 \cdot 10^{-7}$$

Soit 2 000 000 itérations



Accélération

- Utilisation des méthode implicites

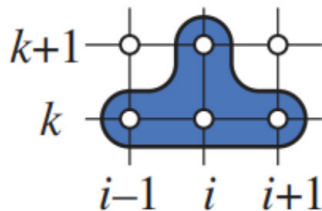
$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = c \mathcal{D}_2 U^{k+1}$$

- Méthodes de Crank Nicolson

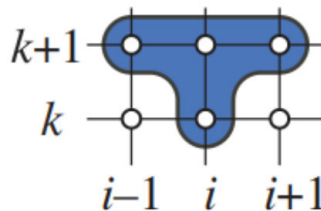
$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = c \mathcal{D}_2 (U^{k+1} + U^k)/2$$

- ...

Euler explicite



Euler implicite



Crank Nicolson

