

Représentation et modélisation de surfaces

Représentation et modélisation de surfaces

- **Théorie des surfaces lisses**
- Courbures
- Maillages
- Textures uv
- Surfaces Splines
- Surface de subdivision
- Ensemble de points

Surface Variété / Manifold

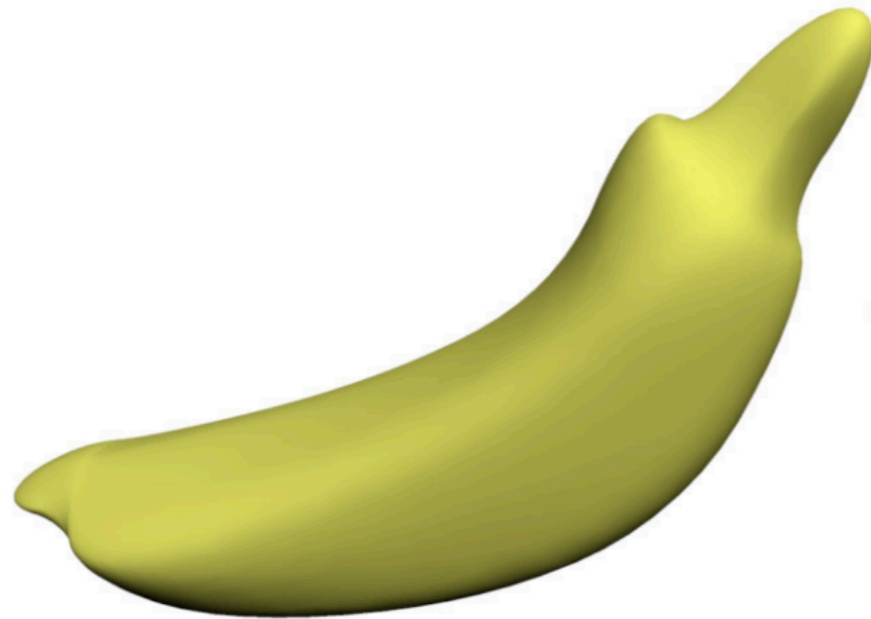
Une surface Γ est une variété de dimension 2 (/ **2-manifold**)

Si tous les points qui la composent possèdent un **voisinage homéomorphe à un disque**.

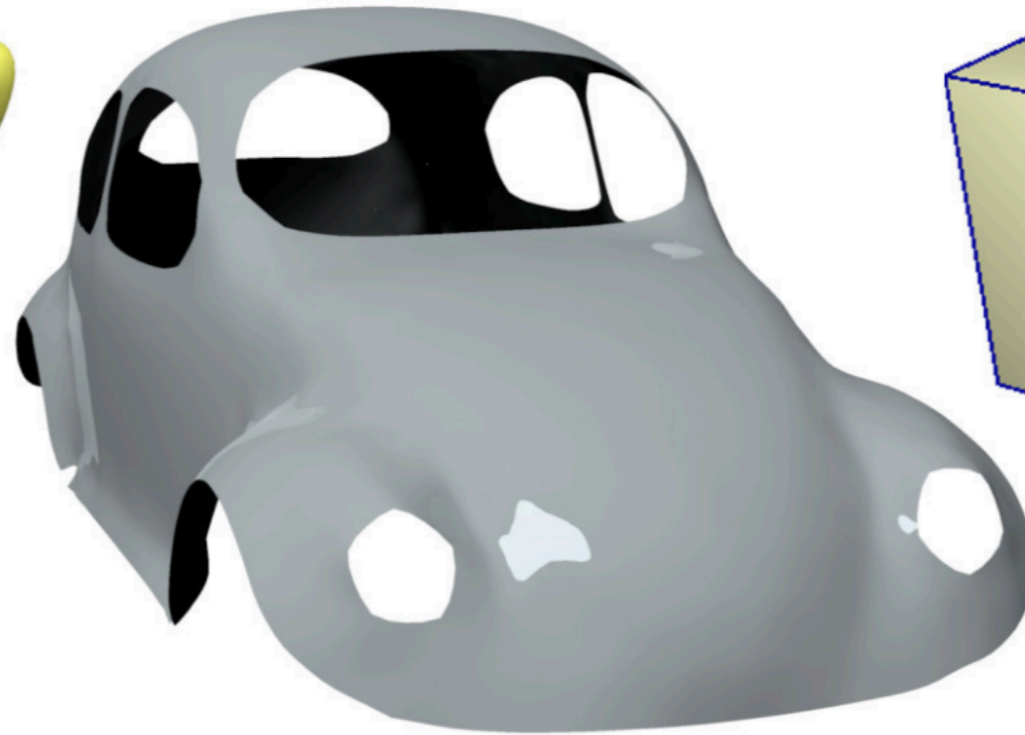
Demi-disque pour des variété "à bord".

Homéomorphisme: Application bijective et continue, dont l'inverse est continue.

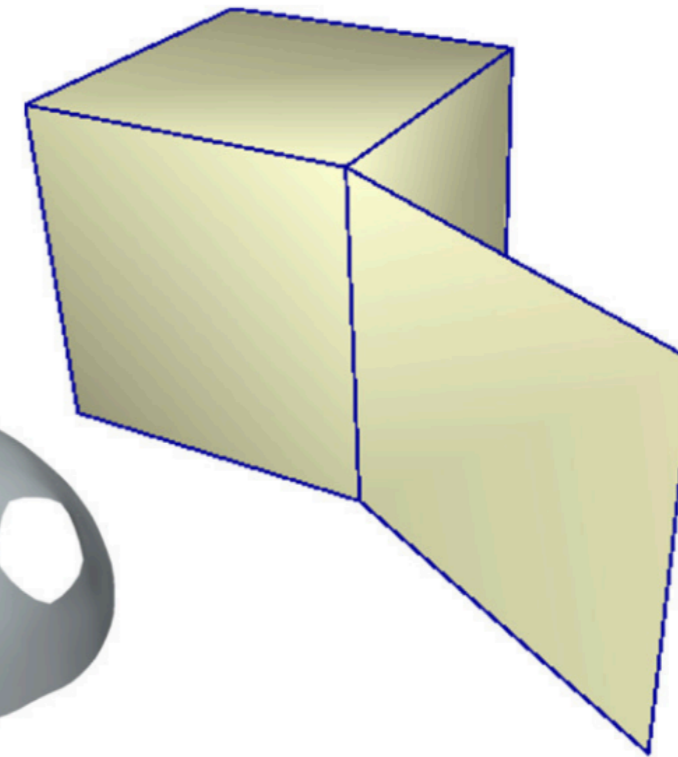
2-manifold



*2-manifold
with boundaries*



not a 2-manifold



Espace tangent

Soit Γ une surface associée à la fonction paramétrique

$$S : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto S(u, v) = (S_x(u, v), S_y(u, v), S_z(u, v)) \end{cases}$$

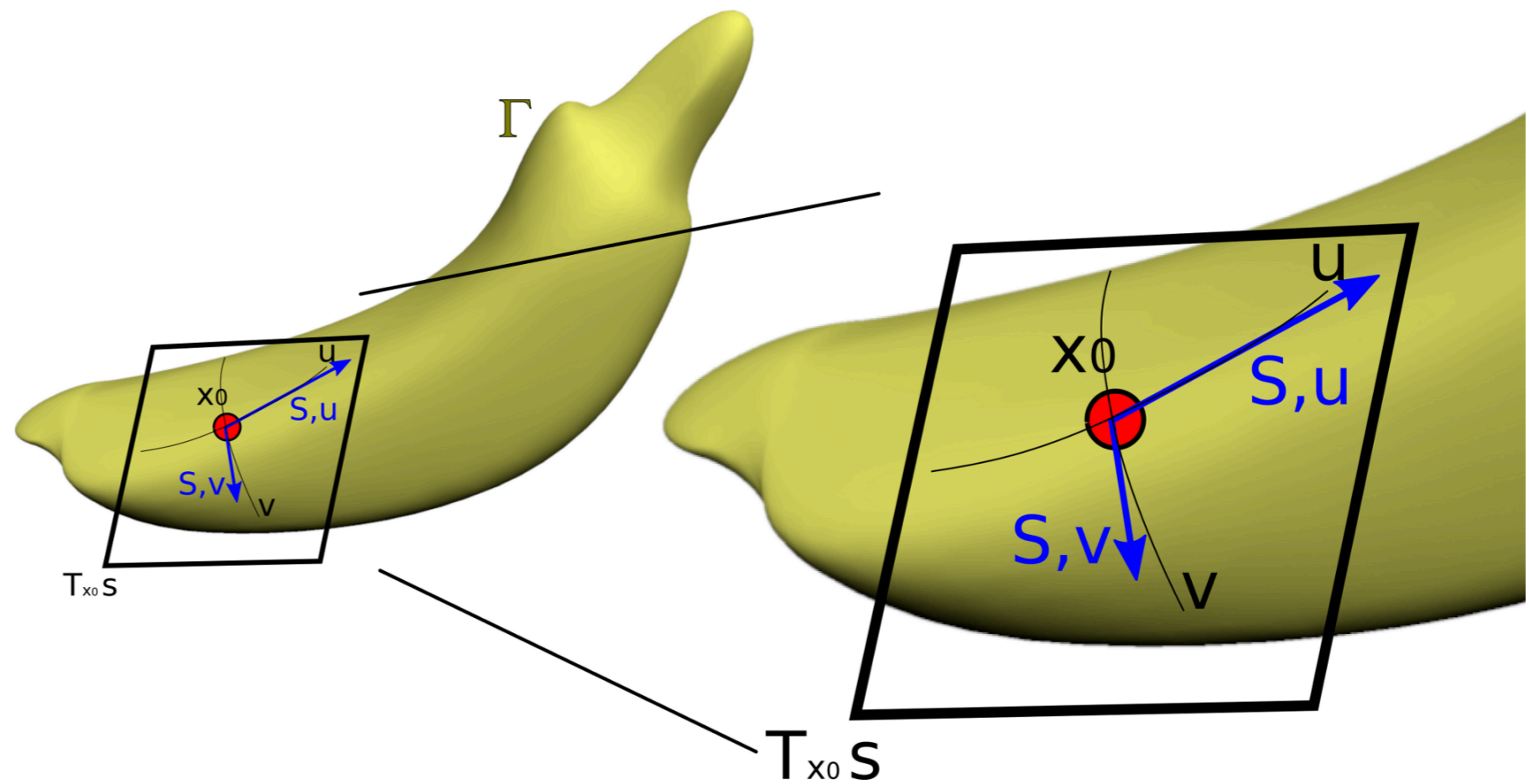
Dérivées partielles de S : $\frac{\partial S}{\partial u} = S_{,u}$ et $\frac{\partial S}{\partial v} = S_{,v}$

Espace tangent de S au point $p_0 = S(u_0, v_0)$

$$T_p(h_u, h_v) = S_{,u}(u_0, v_0) h_u + S_{,v}(u_0, v_0) h_v$$

Normale unitaire n à Γ en p_0

$$n(u_0, v_0) = \frac{S_{,u}(u_0, v_0) \times S_{,v}(u_0, v_0)}{\|S_{,u}(u_0, v_0) \times S_{,v}(u_0, v_0)\|} \in \mathbb{S}^2$$



Continuité des surfaces

Continuité paramétrique

S est C^1 si et seulement si $\frac{\partial S}{\partial u} = S_{,u}$ et $\frac{\partial S}{\partial v} = S_{,v}$ sont définies et continues.

S est C^2 si et seulement si $\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = S_{,uu}$ $\frac{\partial^2 S}{\partial v^2} = S_{,vv}$ $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = S_{,uv} = S_{,vu}$ sont définies et continues.

Continuité géométrique

Γ est G^1 si elle a un plan tangent en tout point.

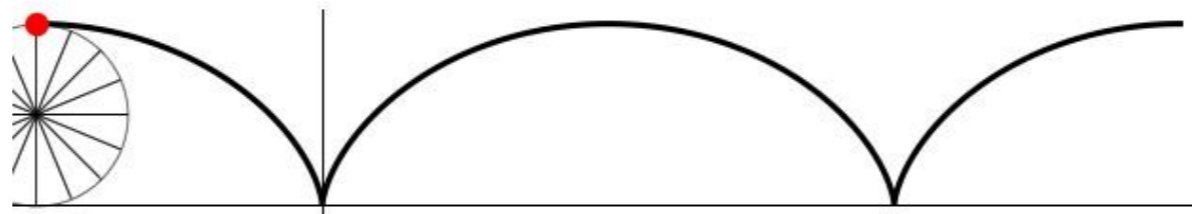
Γ est G^2 si elle a une courbure continue en tout point.

G^2 important pour les réflexions lisses

Rem. $S \in C^k \neq \Gamma^k$

$f(t) = (t, t)$ sur $[-1, 0]$, et $(t/2, t/2)$ sur $[0, 2]$

$h(t) = R(t - \sin(t), t - \cos(t))$



Propriétés intégrales

Aire A de Γ

$$A = \iint_{(u,v) \in \mathcal{D}} \|S_{,u} \times S_{,v}\| \, du \, dv$$

Volume V défini par Γ (surface fermée)

$$\forall e \in \mathbb{S}^2, V = \iint_{(u,v) \in \mathcal{D}} (S(u,v) \cdot e) (n(u,v) \cdot e) \, du \, dv$$

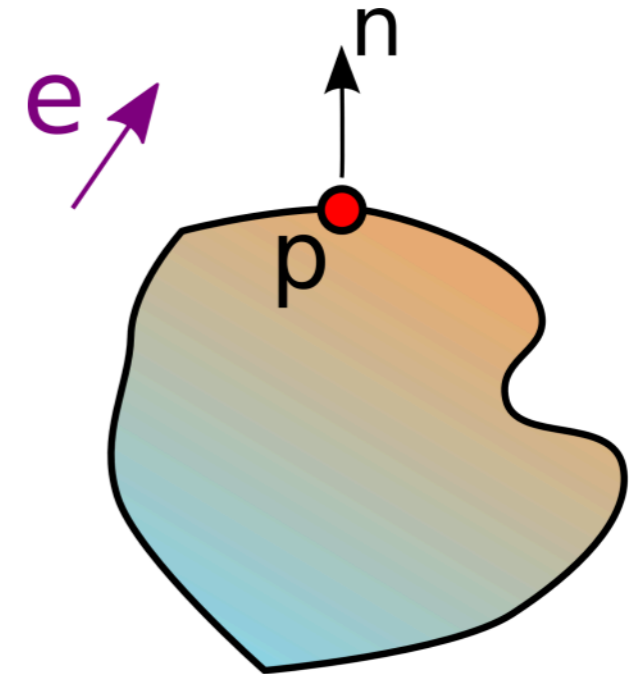
- Définition du volume: $V = \iiint_{\Omega} d\Omega$

- Théorème de Green-Ostrogradski (divergence theorem): $\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(f) \, d\Omega = \iint_{\partial\Omega} f \cdot n \, dS$

- On considère $f(p) = (p \cdot e) e$, pour $e \in \mathbb{S}^2$ arbitraire.

On a $\operatorname{div}(f) = \|e\|^2 = 1$

$$\Rightarrow V = \iiint_{\Omega} 1 \, d\Omega = \iint_{\partial\Omega=S} ((S(u,v) \cdot e)e) \cdot n \, dS = \iint_S (S(u,v) \cdot e) (e \cdot n) \, dS$$



Changement de longueurs: première forme fondamentale

Soit une courbe 2D $C(t) = (C_x(t), C_y(t))$

$$\text{Longueur de } C \text{ est } L_c = \int_t (C'^T(t)C'(t))^{1/2} dt$$

Soit la courbe $C_s = S \circ C$, la courbe image de C sur la surface Γ définie par S .

$$C_s(t) = (S_x(C_x(t), C_y(t)), S_y(C_x(t), C_y(t)), S_z(C_x(t), C_y(t)))$$

Longueur de la courbe 3D L_{C_s}

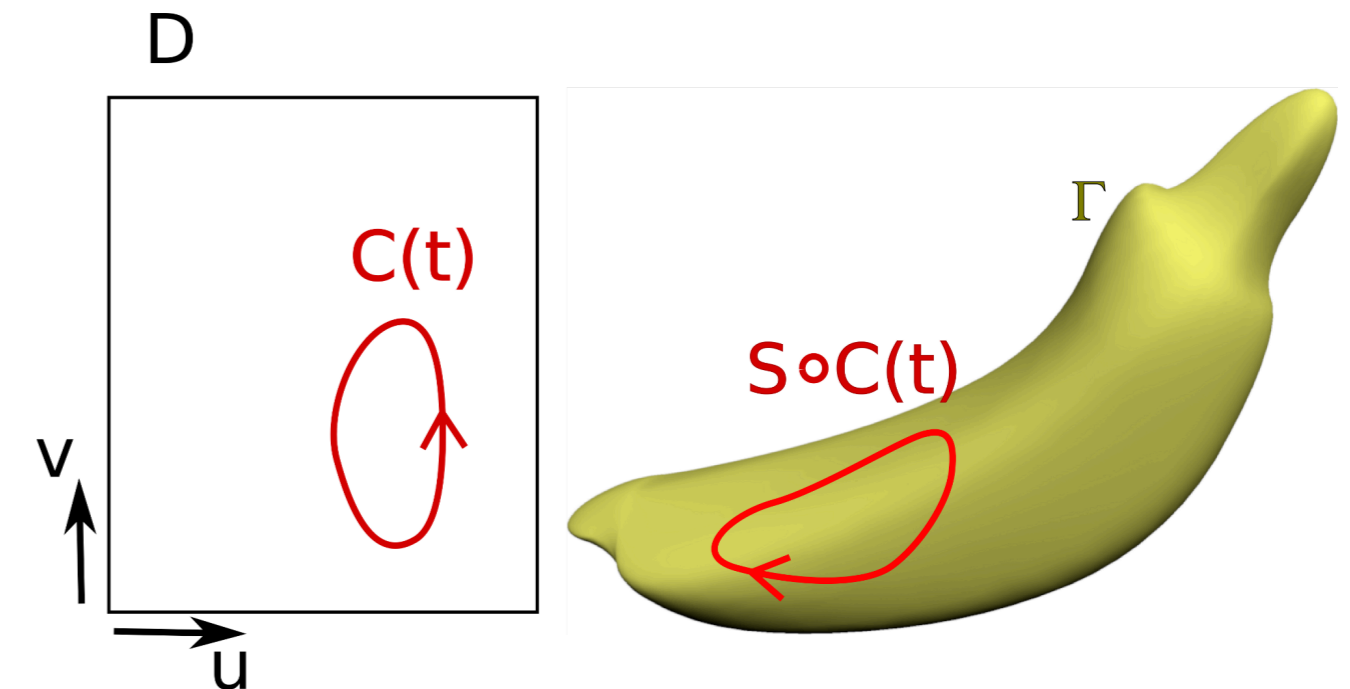
$$L_{C_s} = \int_t ((S \circ C)'^T (S \circ C)')^{1/2} dt = \int_t (C'^T(t) I_s C'(t))^{1/2} dt$$

$$I_s = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} \\ \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} & \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)^2 \end{pmatrix}$$

I_s : 1ère forme fondamentale

Caractérise changement locaux de longueurs sur la surface.

Changement local d'aire: $\sqrt{\det(I_s)}$, Aire de la surface $\iint_{(u,v)} \sqrt{\det(I_s)} du dv$



Représentation et modélisation de surfaces

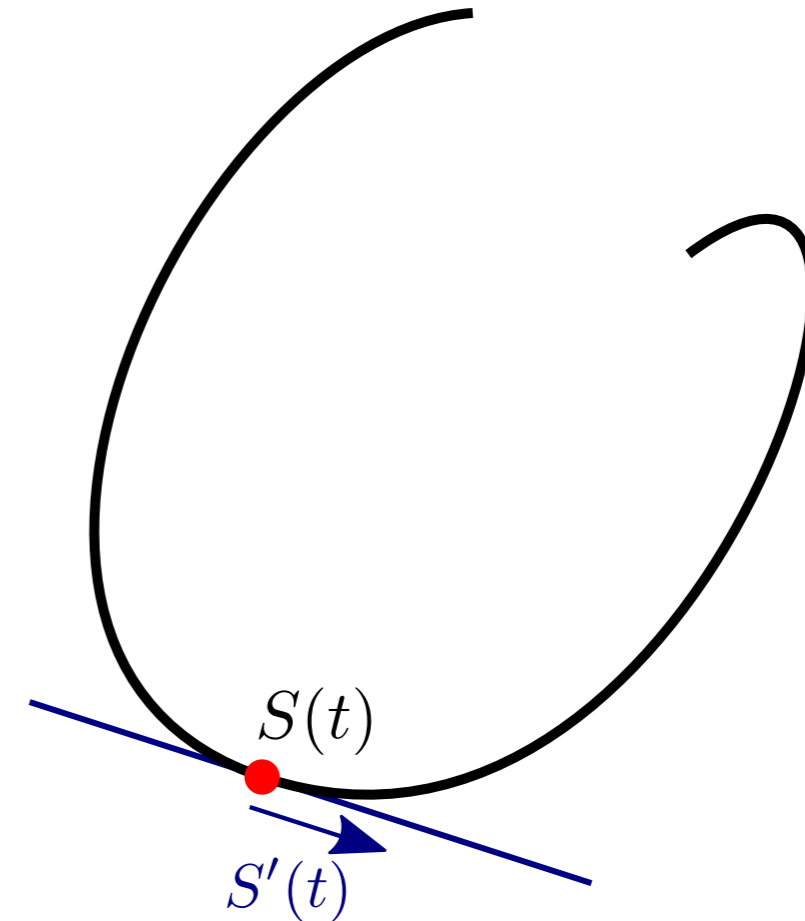
- Théorie des surfaces lisses :
- **Courbures**
- Maillages
- Textures uv
- Surfaces Splines
- Surface de subdivision
- Ensemble de points

Rappel sur les courbes paramétriques

Courbe $S(t)$, $S : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow (S_x(t), S_y(t), S_z(t)) \end{cases}$

- Vecteur tangent à la position $S(t)$: $T(t) = S'(t)/\|S'(t)\|$

- Longueur de la courbe $L = \int_t \|S'(t)\| dt$



Courbure d'une courbe

Interprétation géométrique

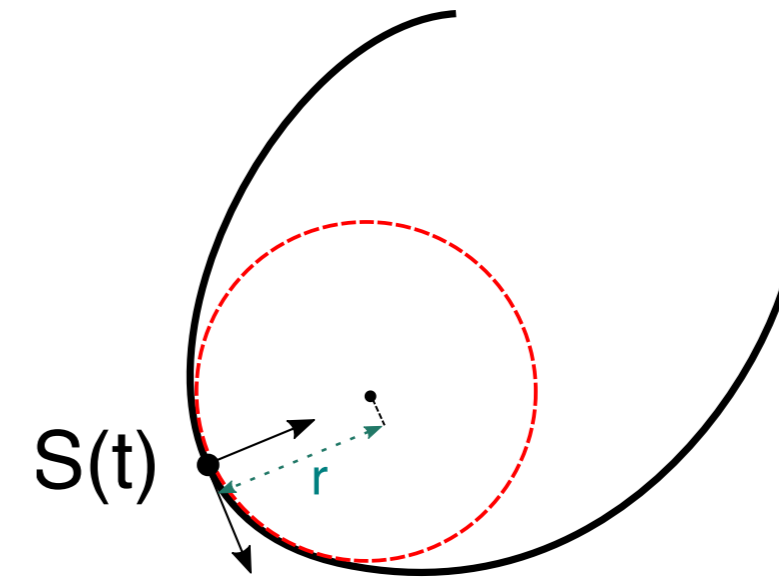
- Rayon de courbure r : rayon du cercle osculateur.
- Courbure $\kappa = 1/r$.

Définition Soit la paramétrisation curviligne μ telle que $\|S'(\mu)\| = 1$.

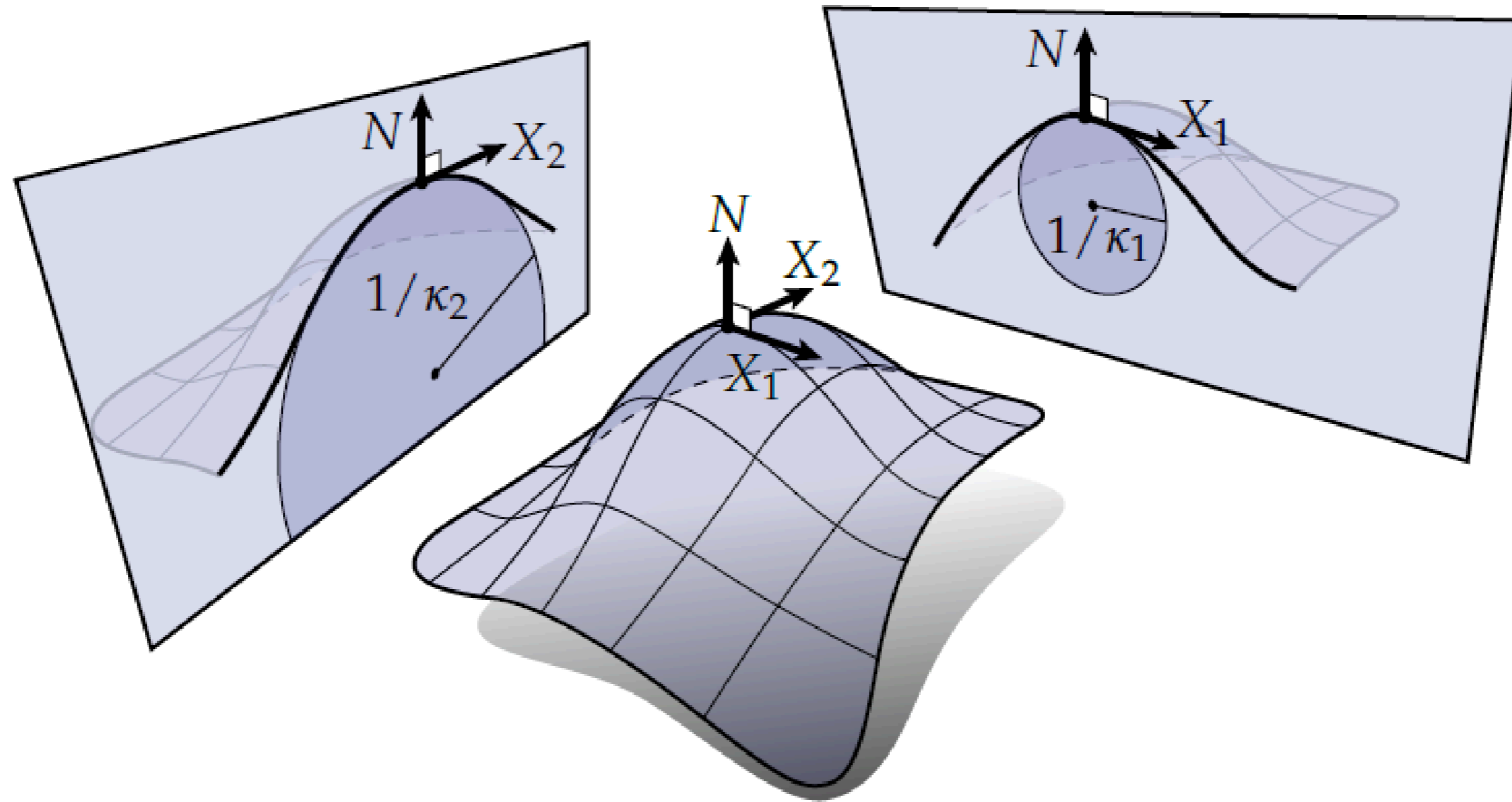
- $|\kappa(\mu)| = \left\| \frac{\partial T}{\partial \mu}(\mu) \right\|$: *taux de changement du vecteur tangent*
- κ est considéré comme positif/négatif en fonction de la direction du vecteur normal.

Définition calculatoire

$$|\kappa(t)| = \frac{\|S'(t) \times S''(t)\|}{\|S'(t)\|^3}$$



Courbure d'une surface: intuition



Keenan Crane, Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus. ACM SIGGRAPH 2013

Seconde forme fondamentale

Intuition: approximation quadratique de la surface dans son plan tangent.

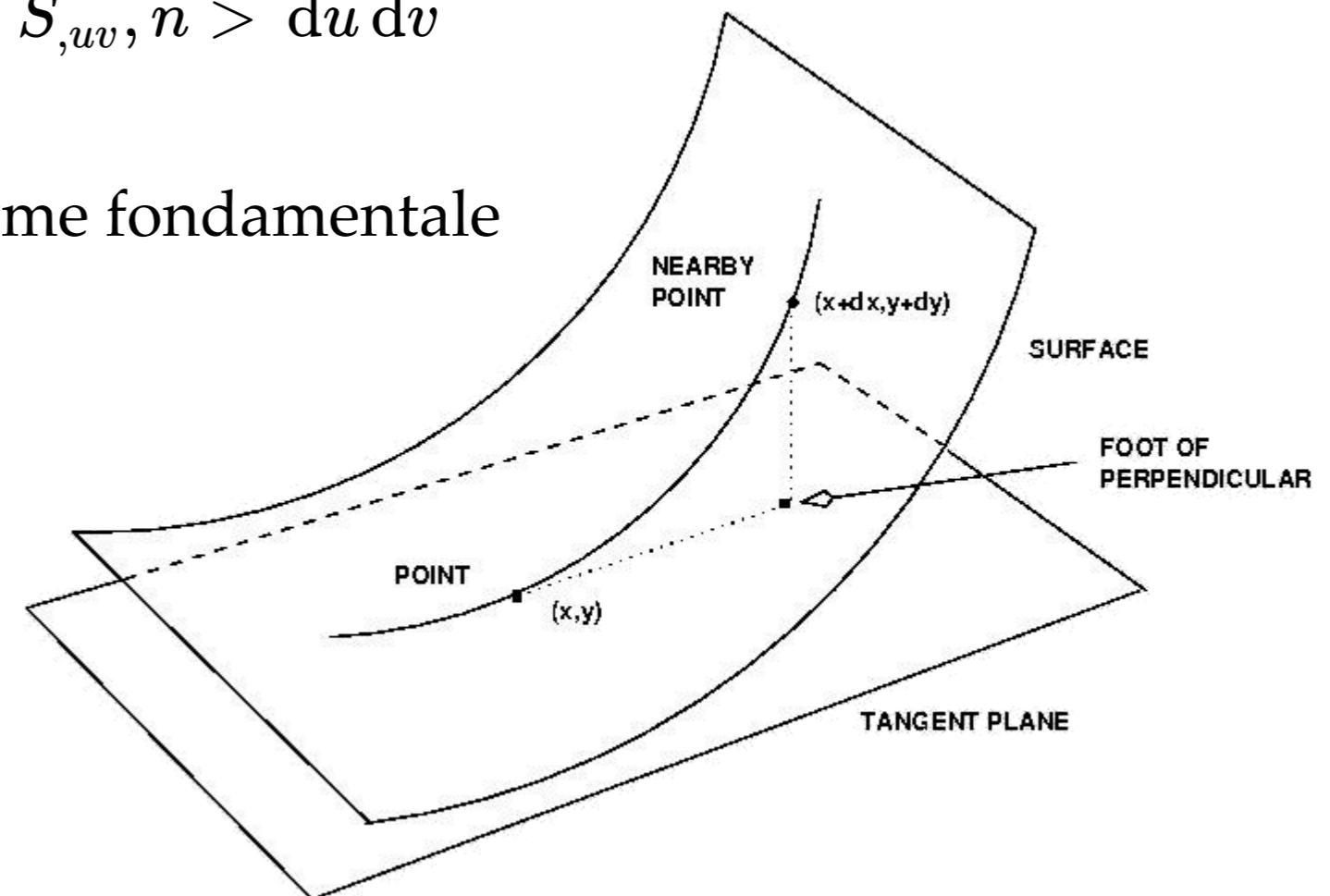
Considérons S définie dans son plan tangent.

L'expansion de Taylor de S au second ordre dans la direction normale est

$$z(u, v) = \frac{1}{2} \langle S_{,uu}, n \rangle du^2 + \frac{1}{2} \langle S_{,vv}, n \rangle dv^2 + \langle S_{,uv}, n \rangle du dv$$

On appelle la forme quadratique associée: seconde forme fondamentale

$$\mathbb{I}_S = \begin{pmatrix} \langle S_{,uu}, n \rangle & \langle S_{,uv}, n \rangle \\ \langle S_{,uv}, n \rangle & \langle S_{,vv}, n \rangle \end{pmatrix}$$



Application de Gauss et courbure

- $W_S = \Pi_s I_S^{-1}$ matrice de Weingarten (/ shape operator).

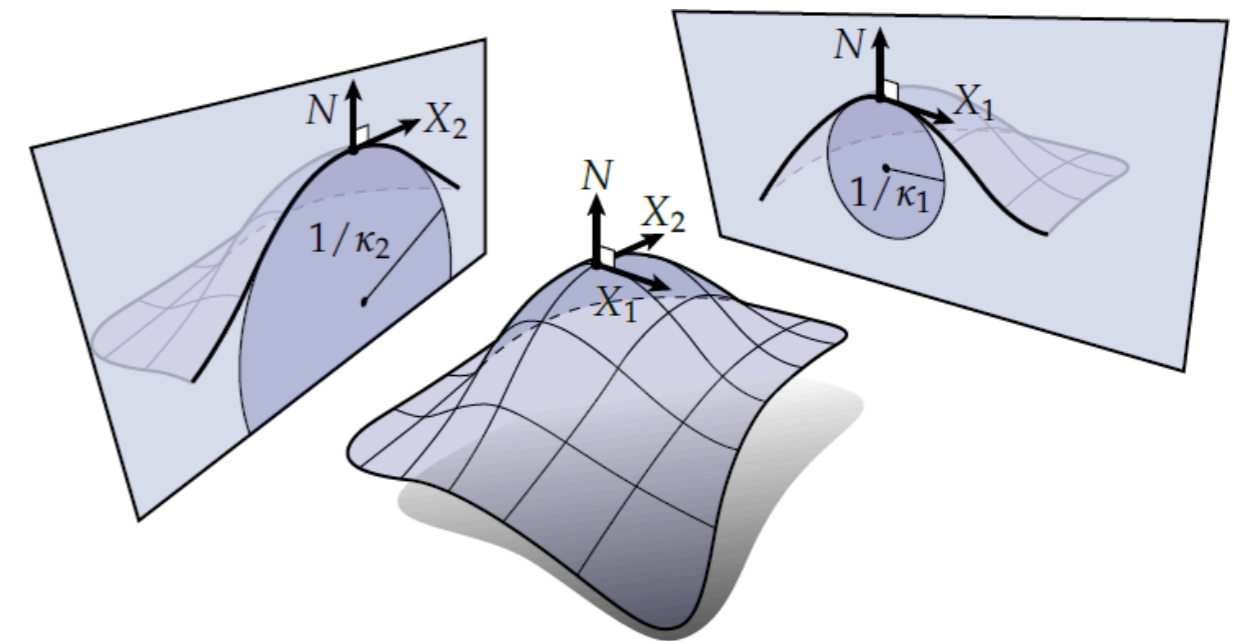
Changement d'orientation de la surface par rapport à son plan tangent (Π_s), en abscisse curviligne (I_S^{-1}).

- W_S est diagonalisable et a des valeurs propres réelles: $W_S = V^T \Lambda V$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

- Vecteurs propres: directions principales de courbures (dans le plan tangent).

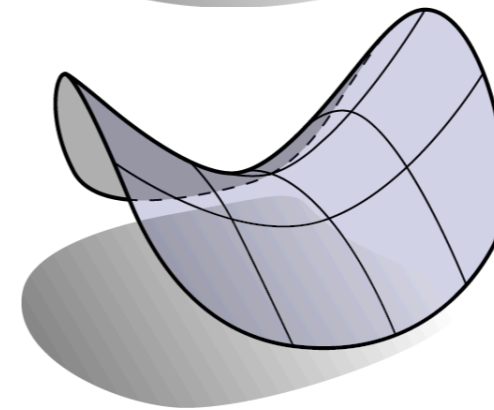
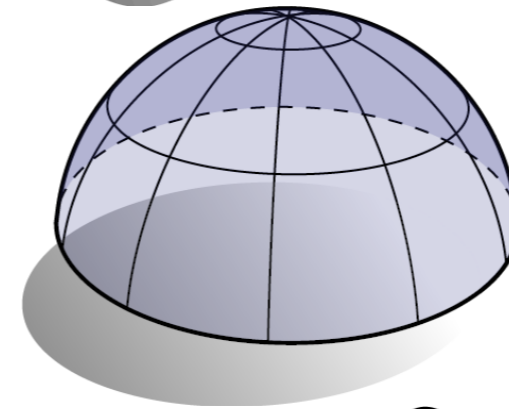
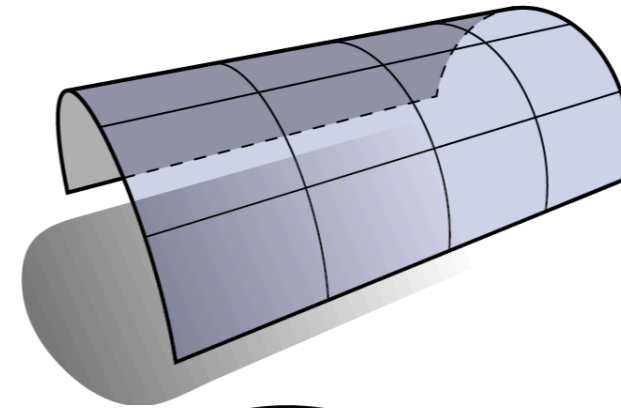
- Valeurs propres (κ_1, κ_2): valeurs des courbures principales.



Caractérisation locale des surfaces

Une surface (lisse) peut être localement

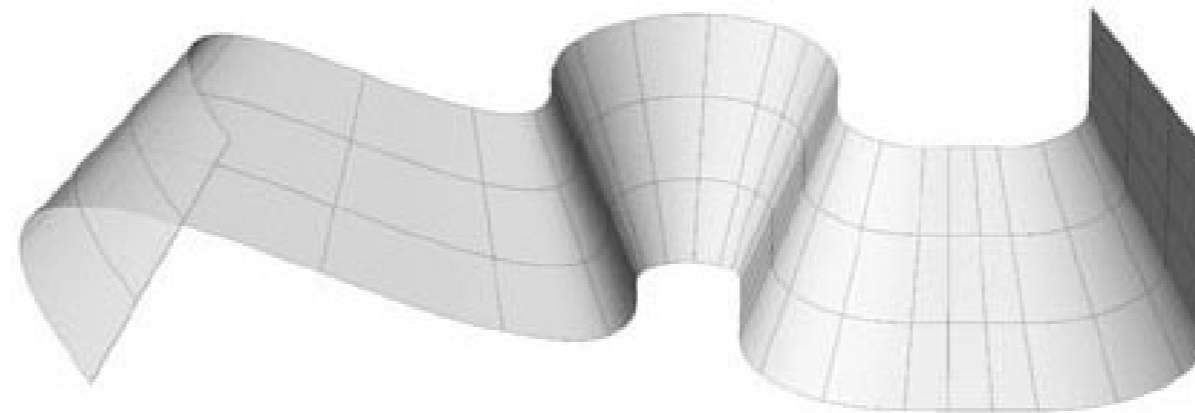
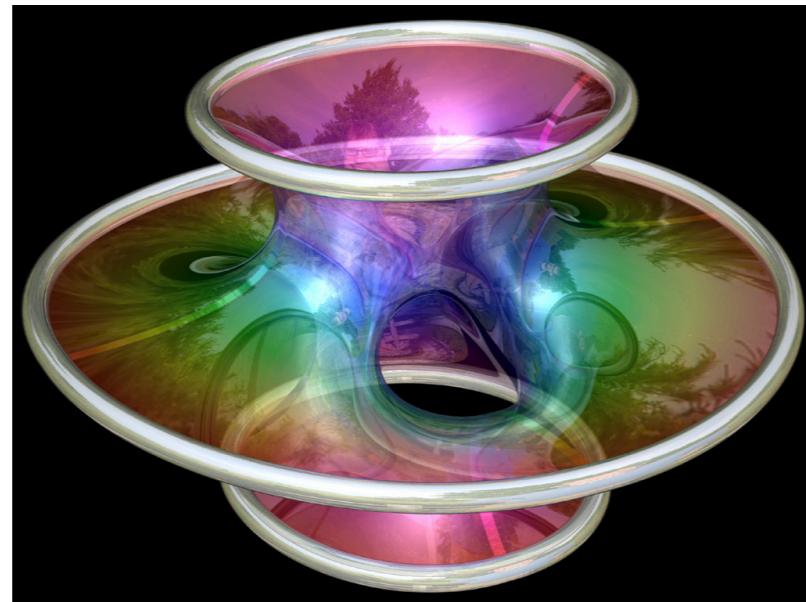
- Plane: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$
- Cylindrique: $\kappa_1 \kappa_2 = 0, \kappa_1 \neq 0$ or $\kappa_2 \neq 0$
- Elliptique: $\kappa_1 \kappa_2 > 0$
- Hyperbolique: $\kappa_1 \kappa_2 < 0$



Keenan Crane, Digital Geometry Processing
with Discrete Exterior Calculus. ACM
SIGGRAPH 2013

Courbures moyenne et courbure de Gauss

- Courbure de Gauss: $K_S = \kappa_1 \kappa_2 = \det(W_S) = \frac{\det(\text{II}_S)}{\det(\text{I}_S)}$
- Courbure moyenne: $H_S = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \text{tr}(W_S)$
- $H_S = 0 \Leftrightarrow S$ est une surface minimale
- $K_S = 0 \Leftrightarrow S$ est une surface développable



Représentation et modélisation de surfaces

- Théorie des surfaces lisses :
- Courbures
- Maillages
- Textures uv
- **Surfaces Splines**
- Surface de subdivision
- Ensemble de points

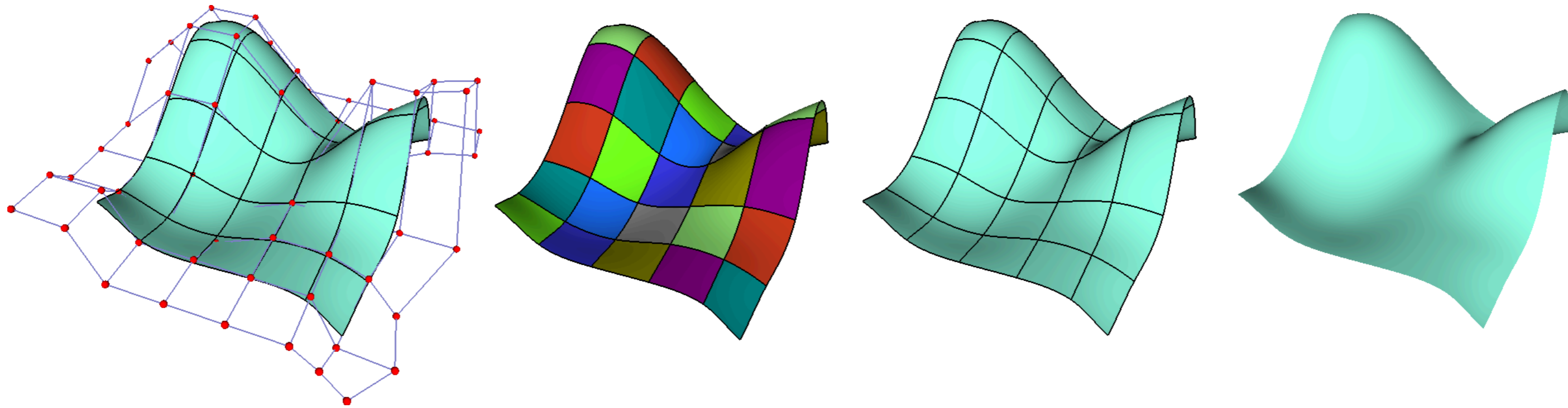
Surface paramétriques - Objectif

Définir des surfaces par morceaux / patches

Chaque morceau étant défini par un polynôme de degré > 1 .

Les patches ont des transitions lisses: patches Splines

Transitions C^1 , ou C^2 .



Cas des courbes paramétriques

Forme générale: $c(s) = \sum_k b_k(s) p_k$

b_k : fonctions de bases (polynomes, support compact)

p_k : points de contrôles

Segments de droites

$$c(s) = (1 - s)p_0 + sp_1$$

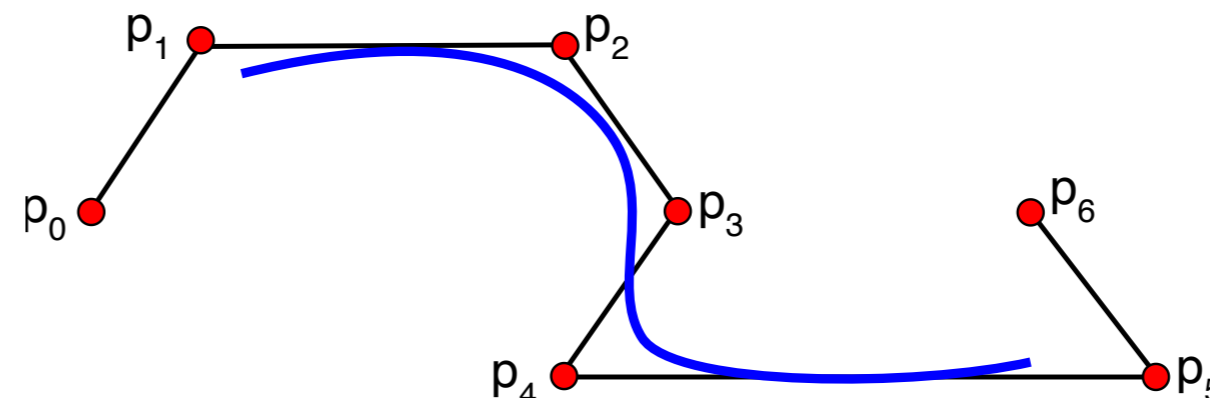
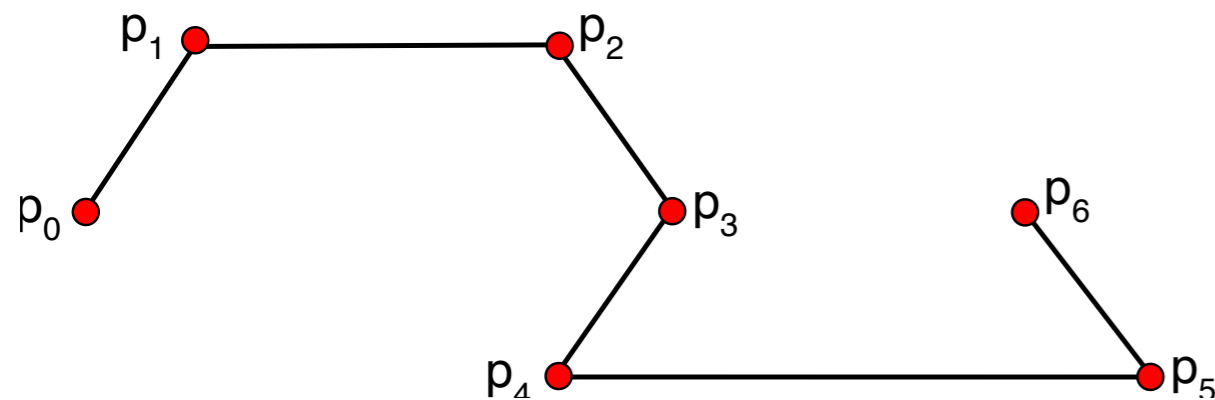
B-spline Cubique uniforme

$$c(s) = \sum_{k=0}^n b_k(s) p_k$$

$$b_{i,k+1}(s) = \frac{s - t_i}{t_{i+k} - t_i} b_{i,k}(s) + \frac{t_{i+k+1} - s}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} b_{i+1,k}(s)$$

$$b_{i,1}(s) = 1, t_i \leq s \leq t_{i+1}, 0 \text{ otherwise}$$

$$\begin{cases} b_0(s) = (1 - s)^3 / 6 \\ b_1(s) = (3s^3 - 6s^2 + 4) / 6 \\ b_2(s) = (-3s^3 + 3s^2 + 3s + 1) / 6 \\ b_3(s) = s^3 / 6 \end{cases}$$



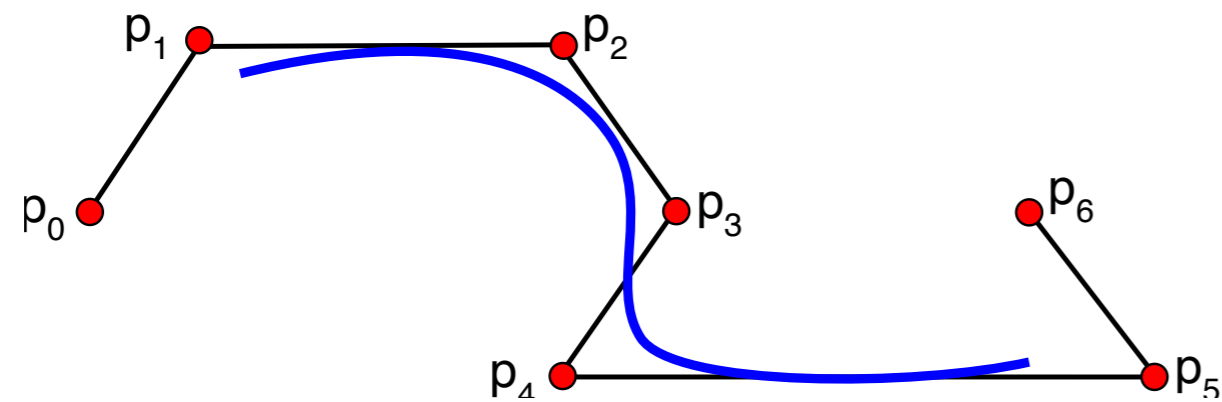
Produit tensoriel

Passage de courbes à des patches de surfaces via produit tensoriel

Produit de polynomes

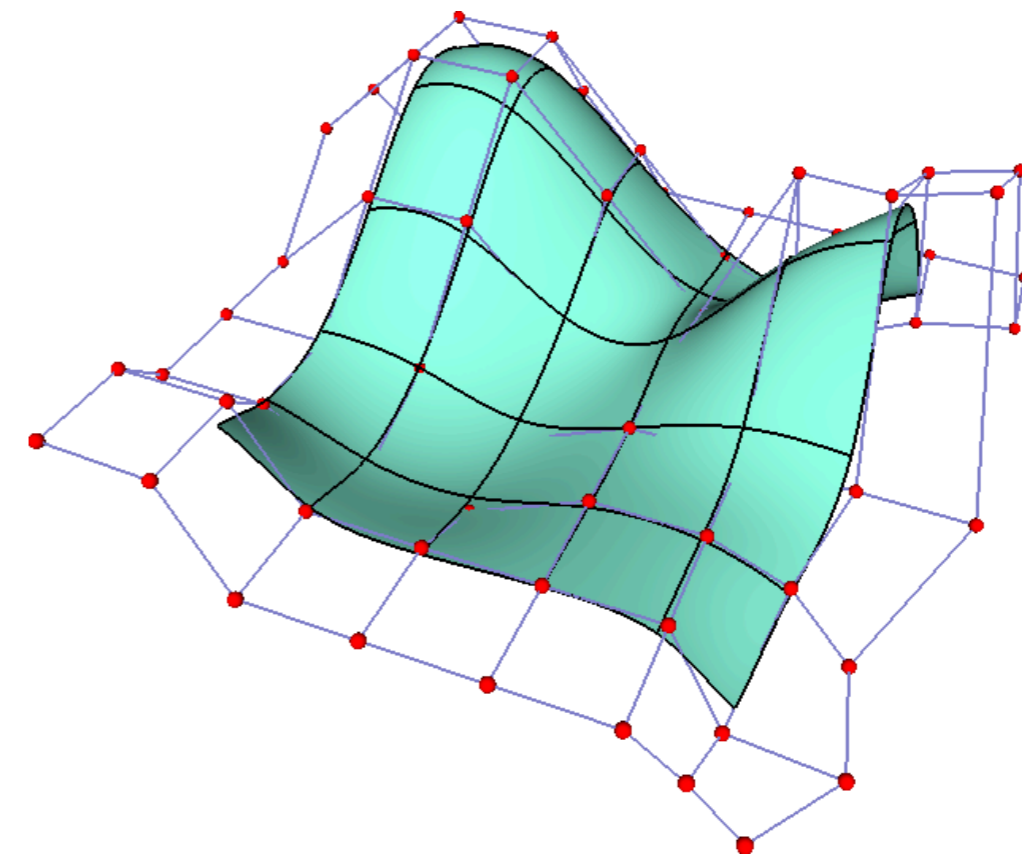
Courbe

$$c(s) = \sum_k b_k(s) p_k$$



Surface

$$S(u, v) = \sum_i \sum_j b_i(u) b_j(v) p_{ij}$$



Formulation matricielle

Cas des splines cubiques

Courbe

$$c(s) = \sum_k b_k(s) p_k$$

$$c(s) = (s^3 \ s^2 \ s \ 1) M \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Surface

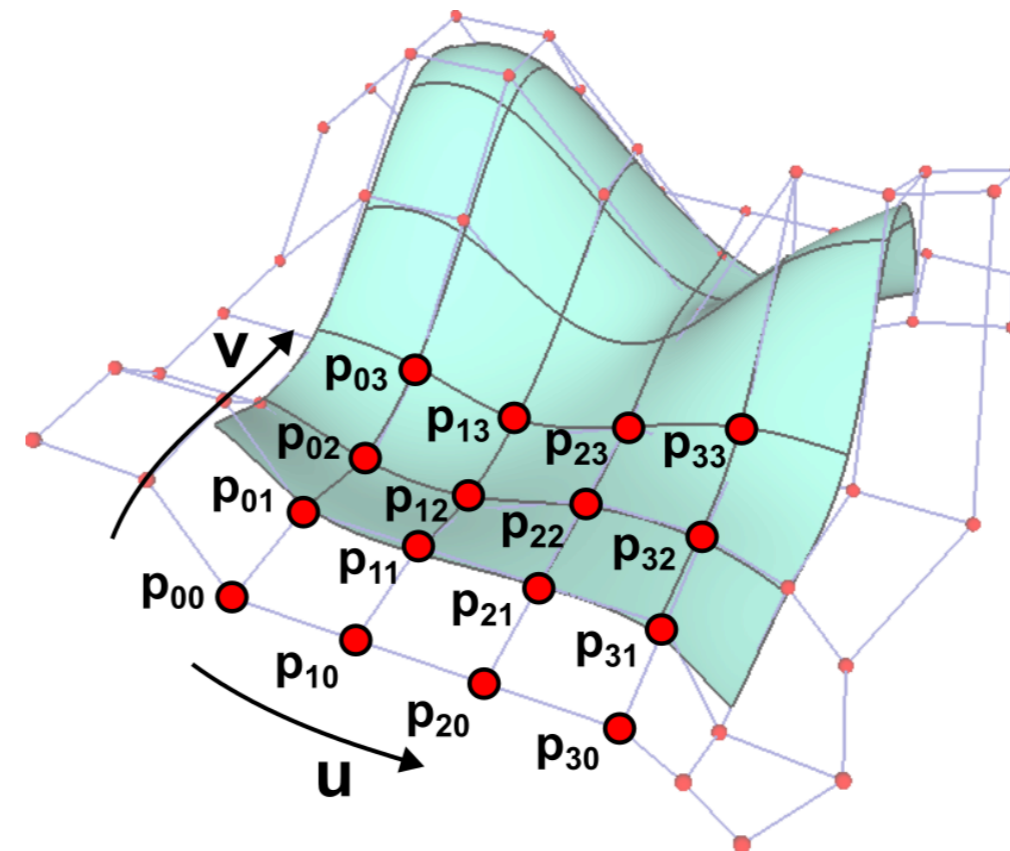
$$S(u, v) = \sum_i \sum_j b_i(u) b_j(v) p_{ij}$$

$$S(u, v) = (u^3 \ u^2 \ u \ 1) M \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

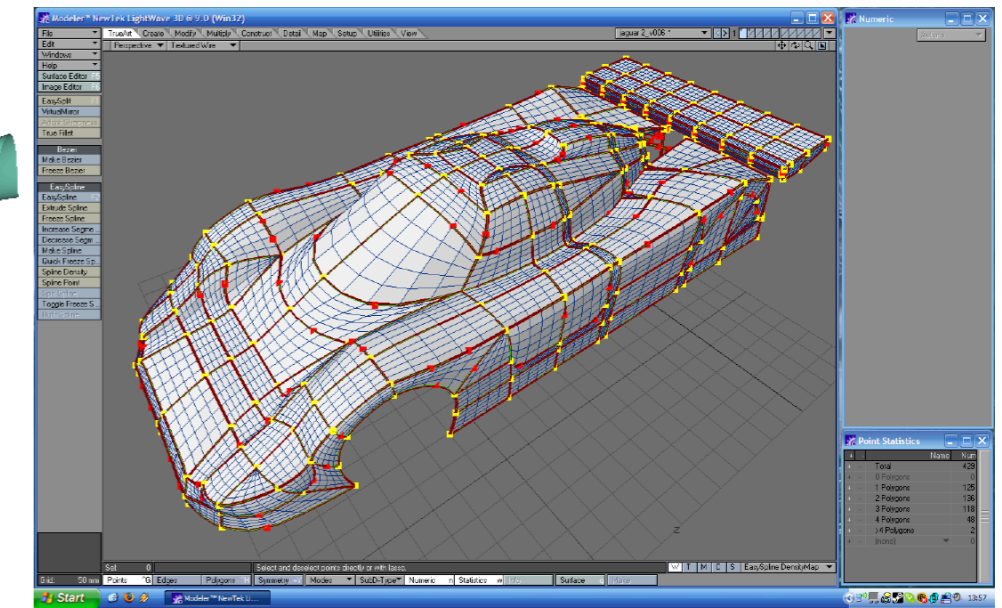
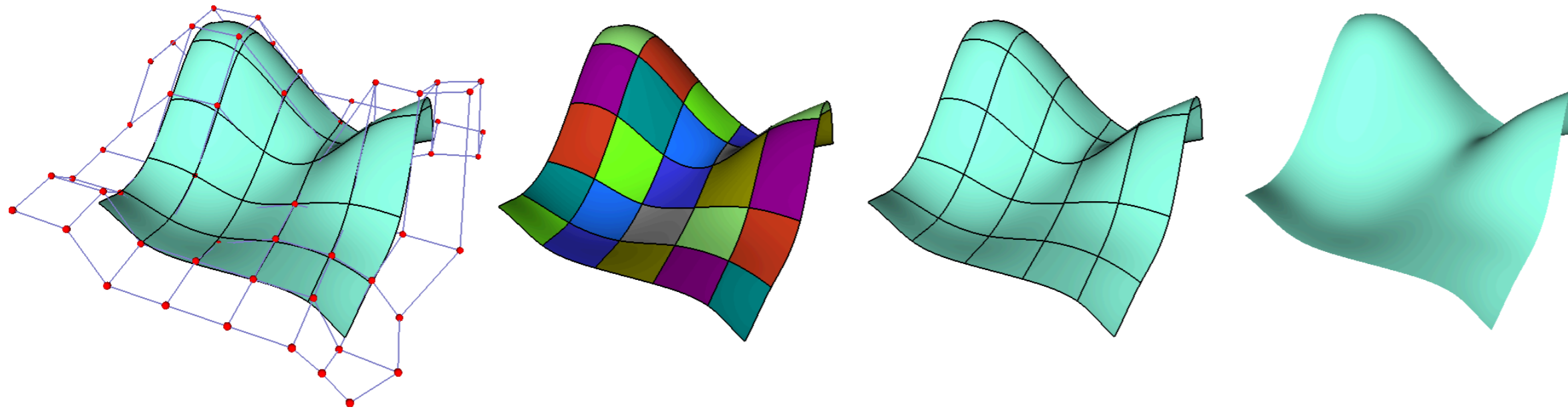
Cas de B-spline cubiques uniformes

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définie par les fonctions de bases



Surface paramétrique - synthèse



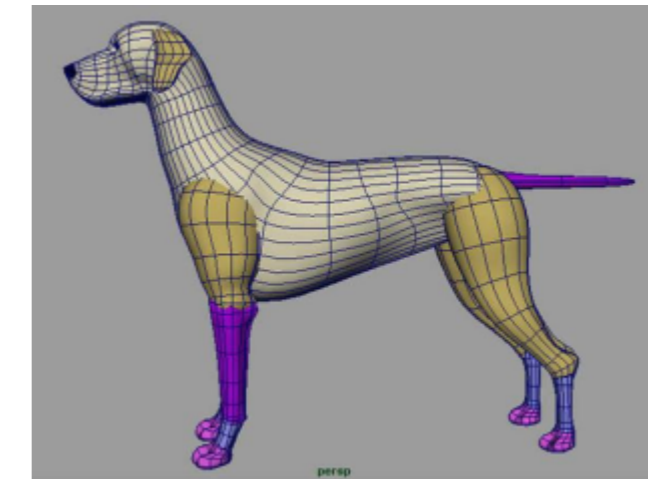
Avantage

Continuité C^2

Calcul dérivée / courbure

Limitation

Limité à des structure en grilles 4×4



How to merge surfaces, add a branch, etc

Représentation et modélisation de surfaces

- Théorie des surfaces lisses :
- Courbures
- Maillages
- Textures uv
- Surfaces Splines
- **Surface de subdivision**
- Ensemble de points

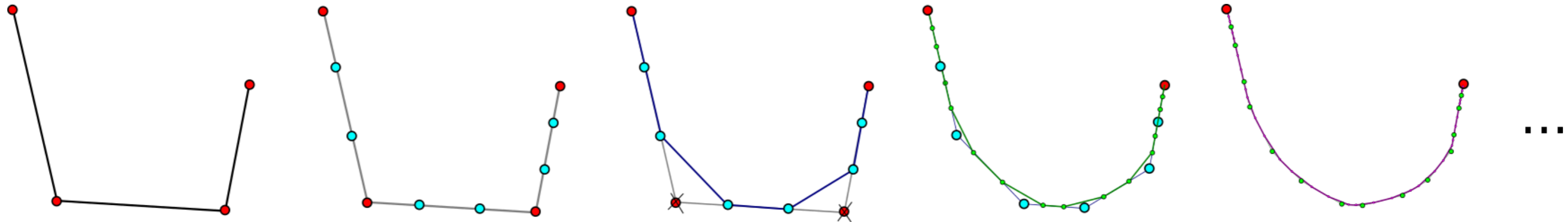
Objectifs des surfaces de subdivision

Préserver les avantages combinés

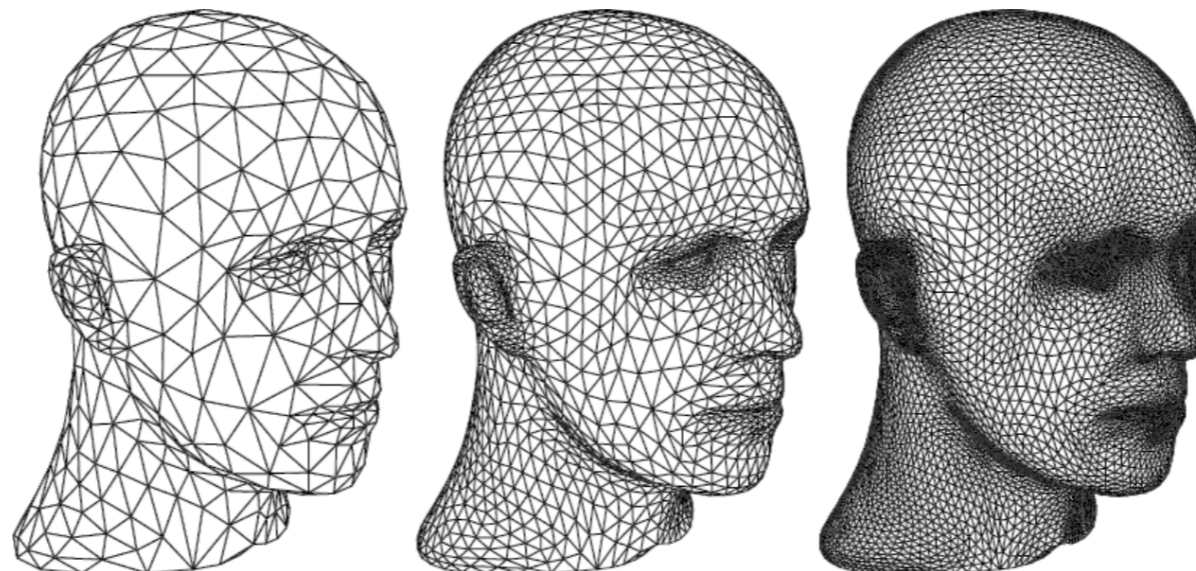
- **topologie arbitraire** des maillages
- **continuité/dérivabilité** des surfaces splines

$$\begin{pmatrix} p_{2k}^{n+1} \\ p_{2k+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k^{n+1} \\ p_{k+1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

Exemple sur les **courbes**



Pour les **surfaces**: Masque de subdivision 2D



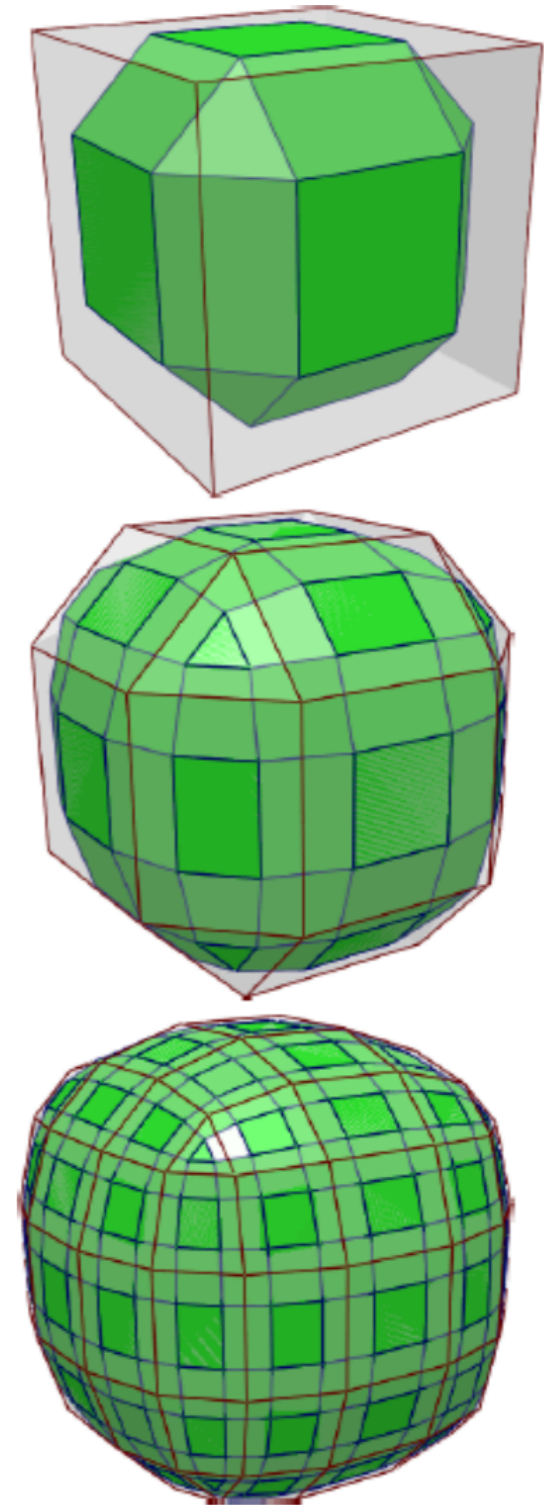
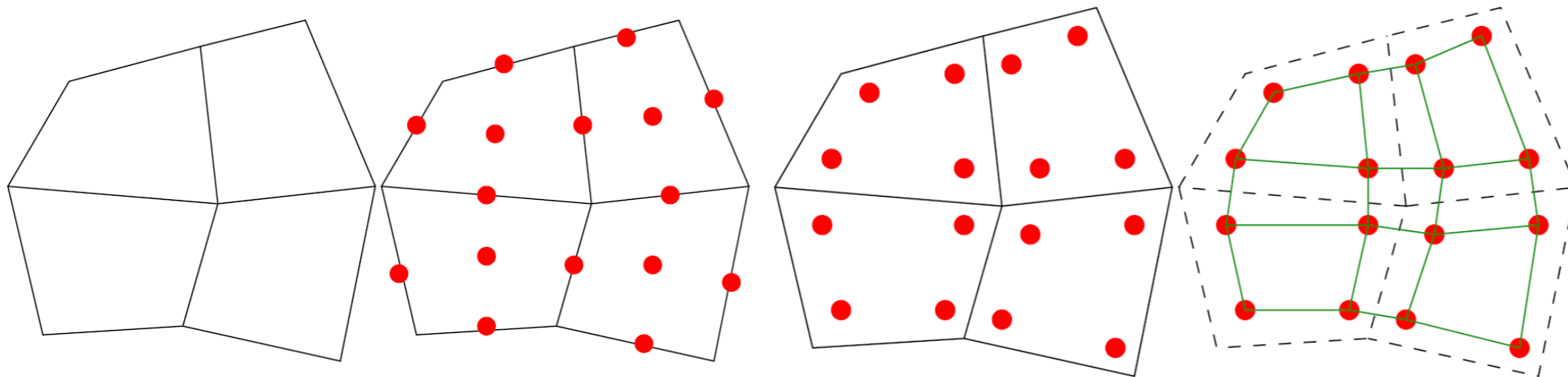
Exemple de Surface de Subdivision: Doo-Sabin

Soit une face $(p_i)_{i = [0, N - 1]}$

- Milieu des arêtes $m_i = (p_i + p_{i+1})/2$

- Barycentre de la face $b = 1/N \sum_{i=0}^{N-1} p_i$

- Nouveaux sommets $n_i = (p_i + m_i + m_{i-1} + b)/4$



Surface de subdivision - synthèse

Plusieurs schémas possibles:

Loop (triangulation), Catmull-Clark (Quads), Butterfly (interpolation), ...

Avantage

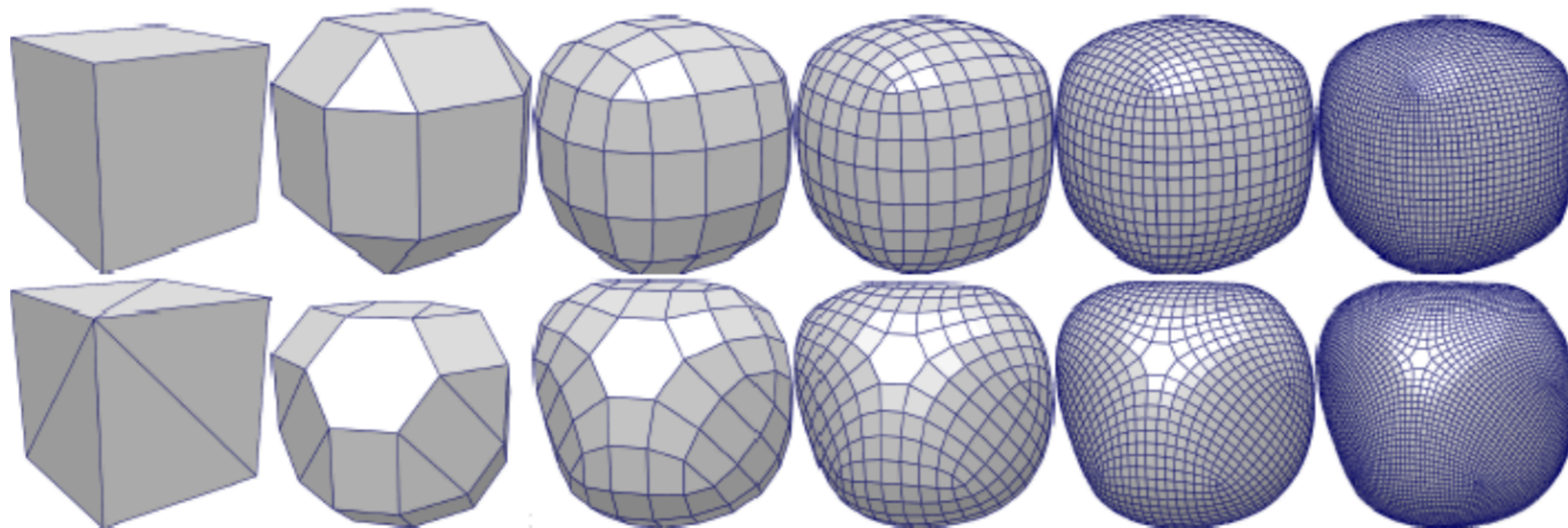
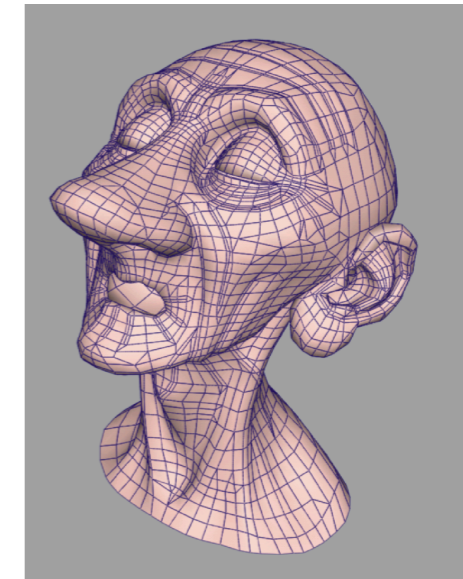
Topologie arbitraire du maillage d'entrée

Convergence garantie vers une surface de continuité C^1 ou C^2 .

Limitation

Forme finale difficile à prévoir (dépend du schéma et de la connectivité)

Pas de calcul direct sur les propriétés différentielles.



Représentation et modélisation de surfaces

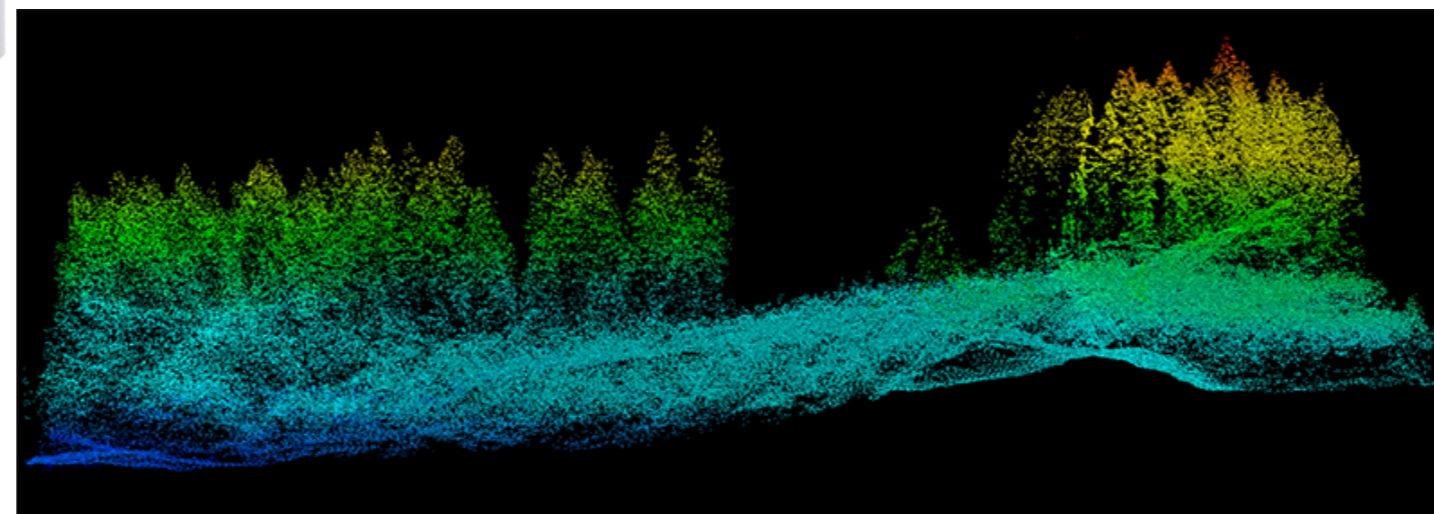
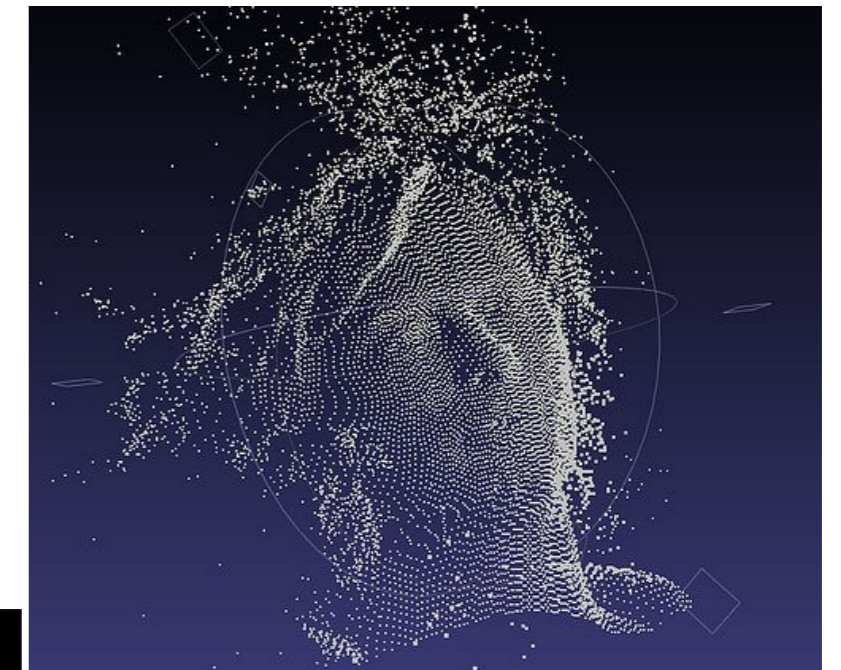
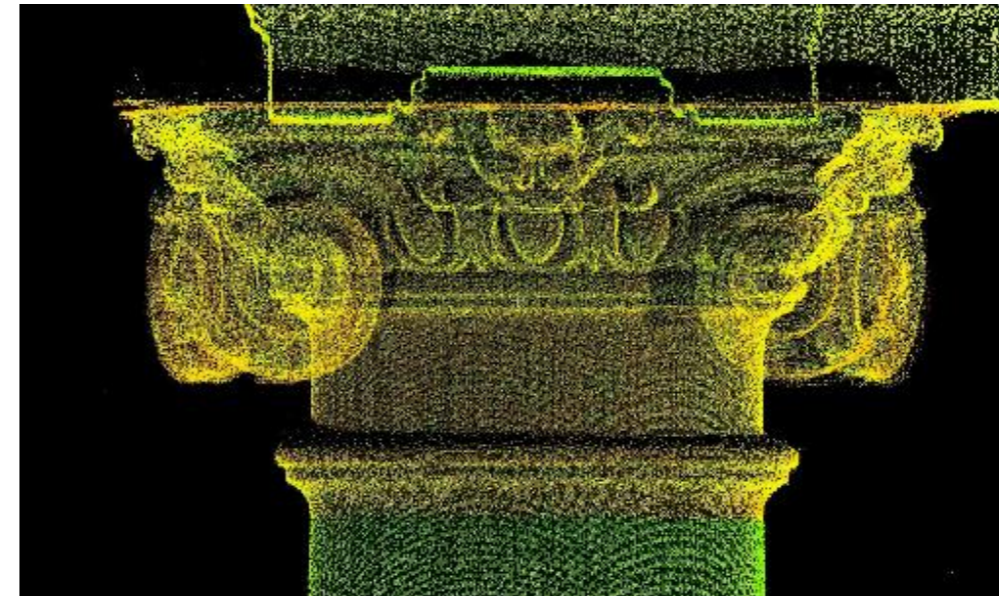
- Théorie des surfaces lisses :
- Courbures
- Maillages
- Textures uv
- Surfaces Splines
- Surface de subdivision
- **Ensemble de points**

Points set

Ensemble de points: facilement accessible à partir de scanners 3D

- Pas de connectivité explicite
- Très grand nombre de points (10^7-10^8)

Possibilité de représenter une impression de surface à partir d'un grand nombre de points



Rendu de points: splatting

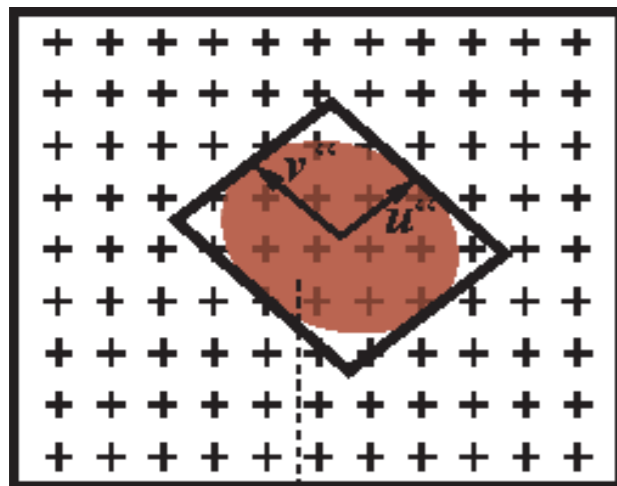
Méthode de rendu dédiée

=> **Surface splatting**

- Représente les points par des **surfels** - *disques orientés tangent à la surface estimée.*
- Rendu dans l'espace image comme des disques



Dans l'espace 3D



Rendu dans l'espace écran



Gaussian splatting

Extension du point splatting: Gaussian splatting

Points associée à une densité gaussienne

$$f(p) = \sigma(\alpha) \exp\left(-\frac{1}{2}(p - p_0)^T \Sigma^{-1} (p - p_0)\right)$$

Rendu volumique rapide, possibilité de fiter les gaussiennes par optimization pour photogrammétrie



Error: WebGL2 not supported.